

Tuyển tập chuyên đề chọn lọc 2024

<https://github.com/vEnhance/evans-phd-notebook/>

LÊ HOÀNG VŨ

Ngày 4 tháng 1 năm 2025

Mục lục

I	Classical theory	4
1	Prerequisites	5
1.1	Fourier transforms	5
1.1.1	Fourier transform of a periodic function	5
1.1.2	Fourier transform of a real function	5
1.1.3	Applications of Fourier stuff	6
1.2	Mellin transform	7
1.2.1	Generalized Mellin transform	7
1.2.2	Applications of Mellin	8
1.2.3	Mellin transforms for functions not decaying at infinity	8
1.3	Dirichlet characters	10
1.3.1	Sums involving Dirichlet characters	10
1.3.2	The L -function of a Dirichlet character	11
1.4	Linear algebraic groups	12
1.4.1	Reductive groups	12
1.4.2	Parabolic and Borel subgroups	13
1.4.3	Table	14
II	Hàm sinh	15
2	Hàm Sinh	16
2.1	Định nghĩa	16
2.2	Bài toán tìm số nghiệm nguyên của phương trình	17
2.3	Từ tìm hệ số hàm sinh đến bài toán tổ hợp cơ bản	18
3	Các nội dung - công cụ hỗ trợ tính toán	20
3.1	Khai triển Taylor và Mac-laurin	20
3.2	Một số công thức khai triển đại số	21
3.3	Một số nội dung giải tích quan trọng khác	21
4	Các khái niệm mở rộng từ hàm sinh	23
4.1	Hàm sinh của phép phân hoạch	23
4.1.1	Sự phân hoạch số nguyên dương	23
4.1.2	Hàm sinh của phép phân hoạch	23
4.2	Hàm sinh mũ	24
4.2.1	Định nghĩa	24
4.2.2	Các công thức cơ bản dùng cho hàm sinh mũ	24
4.2.3	Hàm sinh mũ ứng dụng trong các bài toán đếm có yêu cầu sắp thứ tự	25
4.3	Hàm sinh đa biến	28
4.3.1	Định lý	29
4.3.2	Hàm sinh đa biến trong các đề thi Olympic	32

III Một số chủ đề hình học phẳng	35
5 Phép nghịch đảo trong bài toán chứng minh đồng quy	36
5.1 Lý thuyết cơ bản về phép nghịch đảo	36
5.1.1 Định nghĩa	36
5.1.2 Các tính chất nổi bật	37
5.1.3 Các định lý về ảnh qua phép nghịch đảo	41
5.2 Chùm đường tròn và phép nghịch đảo	45
5.2.1 Cơ sở lý thuyết	45
5.2.2 Chùm đường tròn qua phép nghịch đảo	46
IV Active work: GGP	49
V Active work: Orbital	50
6 Orbital integral	51
6.1 Background	51
6.1.1 Symmetric space	51
6.1.2 Orbital integral	51
6.2 Reparametrization in terms of valuations	52
6.2.1 Computation of value in indicator function	52
6.2.2 Reparametrizing the integral in terms of t and m	54
6.3 Setup	54
6.3.1 Simplifying assumptions	54
6.3.2 Notations	54
6.4 Description of the nonzero regions	55
6.4.1 The case where $n \leq 0$	55
6.4.2 Setup for $n > 0$	56
6.4.3 Volume lemma	56
6.4.4 The case where $n > 0$, and ℓ is odd	57
6.4.5 The case where $n > 0$, ℓ is even, $v(b) = v(d) = 0$	59
6.5 Evaluation of the integral	60
6.5.1 Region where $n \leq 0$ for all values of ℓ	60
6.5.2 Region where $n > 0$ for odd ℓ	62
6.5.3 Region where $n > 0$ for even ℓ	63

I

Classical theory

1 Prerequisites

This chapter covers some theory that is considered “prerequisite” for all the fancy number theory to follow, but isn’t already covered in [Napkin](#).

§1.1 Fourier transforms

As usual, $\mathbf{e}(t)$ is shorthand for $\exp(2\pi it)$.

§1.1.1 Fourier transform of a periodic function

We’ll repeatedly need the following.

Theorem 1.1.1 (Fourier coefficients of a periodic function)

Suppose that $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ is smooth and satisfies $g(x+1) = g(x) + 1$. In that case, it can be expressed in terms of the basis $t \mapsto \mathbf{e}(nt)$ by

$$g(x) = \sum_n a_n \mathbf{e}(nx) \quad \text{where} \quad a_m = \int_0^1 g(x) \mathbf{e}(-nx) dx.$$

Thus if $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ is holomorphic that satisfies $f(z+1) = f(z)$, then we will also have the relation

$$f(z) = \sum_n a_n \mathbf{e}(nz) = \sum_n a_n q^n \quad \text{where} \quad a_n = \int_w^{w+1} f(z) \mathbf{e}(-nz) dz$$

for the same reason. Here w may be any complex number in $\mathcal{H}$; by the contour theorem, the choice doesn’t matter.

If we write $z = x + yi$ it’s often more economical to divorce x and y :

$$f(z) = \sum_n a_n(y) \mathbf{e}(nx) \quad \text{where} \quad a_n(y) = \int_0^1 f(x + yi) \mathbf{e}(-nx) dx$$

§1.1.2 Fourier transform of a real function

Now let us suppose $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. We say it is

- of **moderate decrease** if $|f(x)| = O((1+x^2)^{-1})$, and
- a **Schwartz function** (or of rapid decrease) if all derivatives decay faster than any polynomial.

In either case, one can define the Fourier transform by

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathbf{e}(-\xi \cdot x) dx$$

which converges for any x . The advantage of the Schwartz functions is that $\widehat{\bullet}$ is actually a bijection on this space; whereas $\widehat{f}$ may not be of moderate decrease even if f is.

We’ll repeatedly use the following.

Theorem 1.1.2 (Poisson summation formula)

If both f and $\widehat{f}$ are both of moderate decrease then

$$\sum_n f(n) = \sum_n \widehat{f}(n).$$

Chứng minh. More generally, the following is true:

$$\sum_n f(x+n) = \sum_n \widehat{f}(n) \mathbf{e}(nx).$$

You can prove this by applying the previous result to $g(x) = \sum_n f(x+n)$. Indeed, the m th Fourier coefficients of this g is

$$\begin{aligned} a_m &= \int_0^1 \sum_n f(x+n) \mathbf{e}(-mx) dx \\ &= \sum_n \int_0^1 f(x+n) \mathbf{e}(-mx) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathbf{e}(-m(x - \lfloor x \rfloor)) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathbf{e}(-mx) dx = \widehat{f}(m). \end{aligned}$$

□

We'll also occasionally use:

Theorem 1.1.3 (Fourier inversion)

If f is a Schwartz function then

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x).$$

§1.1.3 Applications of Fourier stuff

We do now a few calculations which we will use later.

Proposition 1.1.4

Fix $t > 0$. The Fourier transform of $h_t = \exp(-\pi t x^2)$ is $\widehat{h}_t = \frac{1}{\sqrt{t}} h_{1/t}$.

Chứng minh. We calculate

$$\begin{aligned} \widehat{h}_t(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi t x^2) \exp(-2\pi i \xi x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\pi}{t} [tx + i\xi]^2\right) \exp\left(-\frac{\pi \xi^2}{t}\right) dx \\ &= \exp\left(-\frac{\pi \xi^2}{t}\right) \int_{\Im z=c} \exp\left(-\pi(\sqrt{t}z)^2\right) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{\pi \xi^2}{t}\right) \int_{\Im z=c} \exp(-\pi z^2) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{\pi \xi^2}{t}\right) = \frac{1}{\sqrt{t}} h_{1/t}(\xi). \end{aligned}$$

Here we used the Cauchy residue theorem to assert that $\int_{\Im z=c} \exp(-\pi z^2) dz$ is independent of the choice of c , and thus we may replace it with 0 at which point we get the famous Gaussian integral. $\square$

Proposition 1.1.5

Fix $t > 0$. The Fourier transform of $h_t(x) = x \exp(-\pi t x^2)$ is $\widehat{h}_t = \frac{i}{t^{3/2}} h_{1/t}$.

Chứng minh. Integrate by parts and repeat previous proposition. $\square$

§1.2 Mellin transform

§1.2.1 Generalized Mellin transform

We'll follow [Zagier's appendix](#).

Initially, suppose $\phi: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ is a smooth function which decays rapidly at infinity. We will not assume ϕ decays rapidly at zero since this restriction is too much; we will instead just assume it has an asymptotic expansion

$$\phi(t) = \sum_n a_n t^{\alpha_n} \quad t \rightarrow 0$$

where $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ are complex numbers say with $\Re \alpha_1 \leq \Re \alpha_2 \leq \dots$. We allow this sequence to be finite, or also infinite if $\lim_{n \rightarrow \infty} \Re \alpha_n = \infty$. In the most common case this will be a sort of “Taylor series” at 0. It's not required that this series actually converges at any point.

Then we define its **Mellin transform** $\mathcal{M}\phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ by

$$\mathcal{M}(\phi, s) = \int_0^\infty t^s \phi(t) \frac{dt}{t}$$

which is initially defined as long as $\Re s > -\Re \alpha_1$. (For example, ϕ is smooth at 0, the above equation is okay for $\Re s > 0$.) The following result will be indispensable as a source of meromorphic continuations:

Theorem 1.2.1 (Generalized Mellin transform for rapidly decaying functions)

This Mellin transform $\mathcal{M}(\phi, s)$ has a meromorphic continuation to $\mathbb{C}$ with (at most) simple poles of residue a_n at $s = -\alpha_n$ (and no other poles).

Chứng minh. Let $T > 0$ be arbitrary. For each $N > 0$ write

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\phi, s) &= \int_0^\infty t^s \phi(t) \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^T t^s \phi(t) \frac{dt}{t} + \int_T^\infty t^s \phi(t) \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^T t^s \left(\phi(t) - \sum_{n=1}^N a_n t^{\alpha_n} \right) \frac{dt}{t} + \sum_{n \leq N} \frac{a_n}{s + \alpha_n} T^{s + \alpha_n} + \int_T^\infty t^s \phi(t) \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

which gives a desired meromorphic continuation to $\Re s > -\Re \alpha_N$ with poles in the specified places, of residue a_n . (Moreover, this choice is independent of T ; a meromorphic continuation is going to be unique, anyways.) $\square$

§1.2.2 Applications of Mellin

- Let $\phi(t) = e^{-t}$ which has a Taylor expansion $1 - t + \frac{t^2}{2} - \dots$ near zero. Then by definition

$$\mathcal{M}(\phi, s) = \int_0^\infty t^s e^{-t} \frac{dt}{t} = \Gamma(s)$$

is the famous Gamma function. We now immediately know that Γ has meromorphic continuation with poles of residue $\frac{(-1)^n}{n!}$ at $s = -n$, for $n = 0, 1, \dots$. Note that integration by parts gives the functional equation $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, and since $\Gamma(1) = 1$, we could have deduced the result a similar way.

- More generally, if $\phi(t) = e^{-\lambda t}$ for some $\lambda > 0$ then

$$\mathcal{M}(\phi, s) = \lambda^{-s} \cdot \Gamma(s)$$

by a change of variables. (Actually, for $\lambda = 0$ we also find that the Mellin transform of a constant function is zero.)

Strong use: we can take ϕ a sum of such exponentials. Consider

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{1}{e^t - 1} \\ &= \frac{1}{t + \frac{t^2}{2!} + \dots} = \sum_{n \geq -1} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} t^n \\ &= e^{-t} + e^{-2t} + e^{-3t} + \dots \end{aligned}$$

where B_{n+1} are the Bernoulli numbers. Taking the Mellin transform of the last expression now gives

$$\mathcal{M}(\phi, s) = \sum_{n \geq -1} n^{-s} \Gamma(s) = \Gamma(s) \zeta(s)$$

where ζ is the Riemann zeta function. This gives an identity

$$\zeta(s) = \frac{\mathcal{M}(\phi, s)}{\Gamma(s)}$$

which is now the meromorphic continuation of ζ !

Let's see what we can extract about its poles. For $n \geq -1$, note that $\mathcal{M}(\phi, s)$ has simple poles at $s = -n$ of residue $\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}$. For $n \geq 0$, the function Γ has simple poles at $s = -n$ of residue $\frac{(-1)^n}{n!}$. That means ζ has only a simple pole of residue 1 at $s = 1$ (since $B_0/0! = 1$). And the values of the zeta function for $n \geq 0$ are now given by

$$\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1}.$$

In particular, $n \geq 0$ is odd then $B_{n+1} = 0$.

§1.2.3 Mellin transforms for functions not decaying at infinity

This is still not general enough for us. For example, we will later want to take the Mellin transform of a certain θ function corresponding to the Riemann zeta function. However, this function behaves like $\frac{1}{2\sqrt{t}}$ for $t \rightarrow 0$ and $1/2$ for $t \rightarrow \infty$. This makes the previous definition fail.

We will now consider a case where t may not decay rapidly at either 0 or ∞ , but having asymptotic expansions at both

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \sum_n a_n t^{\alpha_n} & \text{as } t \rightarrow 0 \\ \phi(t) &= \sum_n b_n t^{\beta_n} & \text{as } t \rightarrow \infty\end{aligned}$$

where $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ and $\beta_1, \beta_2, \dots$ are complex numbers with $\Re \alpha_1 \leq \Re \alpha_2 \leq \dots$ and $\Re \beta_1 \geq \Re \beta_2 \geq \dots$; again we assume $\lim_{n \rightarrow \infty} \Re \alpha_n = \infty$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} \Re \beta_n = -\infty$ if either sequence is infinite. In that case, the original integral $\int_0^\infty t^s \phi(t) \frac{dt}{t}$ is defined if $\Re s > -\Re \alpha_1$ and $\Re s < -\Re \beta_1$. The problem is that this might not hold for *any* values of s at all!

This means even defining the function which we want to take extend requires some straightforward but annoying work. Here is the specification. Again pick a real number $T > 0$. The idea is that $\int_0^\infty t^s \phi(t) \frac{dt}{t}$ maybe split into $\int_0^T t^s \phi(t) \frac{dt}{t} + \int_T^\infty t^s \phi(t) \frac{dt}{t}$ and each of the two halves will be defined somewhere and can be extended analytically as before. The explicit definition is to consider

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\phi, s) &= \int_0^T \left(\phi(t) - \sum_{n=1}^N a_n t^{\alpha_n} \right) \frac{dt}{t} + \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{s + \alpha_n} T^{s+\alpha_n} \\ &+ \int_T^\infty \left(\phi(t) - \sum_{n=1}^N b_n t^{\beta_n} \right) \frac{dt}{t} - \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{s + \beta_n} T^{s+\beta_n}\end{aligned}$$

as $N \rightarrow \infty$. The first line is defined as long as $\Re s > -\Re \alpha_N$ while the second line is defined as long as $\Re s < -\Re \beta_N$. Of course, the overall sum is also independent of T . Thus:

Theorem 1.2.2 (Generalized Mellin transform)

Let $\phi: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ be a function with asymptotic expansions at 0 and ∞ as above. Then $\mathcal{M}(\phi, s)$ as given above is a meromorphic function with at most simple poles only at $s = -\alpha_n$ and $s = -\beta_n$, of residue a_n and $-b_n$ (respectively, and additively).

This means that $\mathcal{M}(-, s)$ gives an $\mathbb{C}$ -linear map from the set of functions $(0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ with asymptotic expansions at 0 and ∞ , to the space of meromorphic functions.

An important example we can now note: [Kernel of the generalized Mellin transform] Suppose $\phi(t) = 1$. Then $\mathcal{M}(1, s) \equiv 0$, because we have $a_1 = b_1 = 1$ and $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, and $a_1 - b_1 = 0$ means the pole there gets cancelled out. More generally, if $\phi(t)$ is any polynomial in t , or any finite sum of t^α terms, then its generalized Mellin transform vanishes. This means we can shift away any constants when discussing the Mellin transform. One just has to keep in mind the definition.

In general, the following result can be proven by change of variables.

Proposition 1.2.3 (What happens if you u -sub a Mellin transform)

Let $\phi: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ be a function with asymptotic expansions at 0 and ∞ as above. Then for any $c > 0$, $d \in \mathbb{R}$ and $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{M}(t^\alpha \phi(ct^d), s) = \frac{\mathcal{M}(\phi, \frac{s+\alpha}{d})}{(c^{1/d}|d|)^{s+\alpha}}.$$

Chứng minh. This is actually a compact way of abbreviating three changes of variables; the idea is

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(t^\alpha \phi(ct^d), s) &= \mathcal{M}(\phi(ct^d), s + \alpha) = |d|^{-(s+\alpha)} \mathcal{M}\left(\phi(ct), \frac{s+\alpha}{d}\right) \\ &= c^{\frac{-(s+\alpha)}{d}} |d|^{-(s+\alpha)} \mathcal{M}\left(\phi(t), \frac{s+\alpha}{d}\right).\end{aligned}\quad \square$$

§1.3 Dirichlet characters

§1.3.1 Sums involving Dirichlet characters

Let $\chi: (\mathbb{Z}/N)^\times \rightarrow \mathbb{C}$ be a primitive Dirichlet character with conductor N .

We need two things:

- Recall that the **Gauss sum** is defined by

$$\tau(\chi) = \sum_{n \bmod N} \chi(n) \mathbf{e}(n/N)$$

which satisfies the famous identity $|\tau(\chi)| = \sqrt{N}$.

- We need the interpolation formula for primitive Dirichlet characters:

$$\chi(n) = \frac{\chi(-1)\tau(\chi)}{N} \sum_{r \bmod N} \bar{\chi}(r) \mathbf{e}(nr/N).$$

The point of this formula is to re-express $\chi(n)$ as a sum of exponentials in n with certain coefficients (given by $\bar{\chi}$).

In particular, this extends $\chi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. For example, this means we could, if we wanted to, speak of the Fourier transform of χ (viewed as a function of period N).

Here is one application of the interpolation formula.

Hệ quả 1.3.1 (Twisted Poisson summation) — If f is of moderate decay then

$$\sum_n \chi(n) f(n) = \frac{\tau(\chi)}{N} \sum_n \bar{\chi}(n) \hat{f}\left(\frac{n}{N}\right).$$

Chứng minh. Let $F(n) = \chi(n) f(n)$. Then by the interpolation formula, we can extend to

$$F(x) = \frac{\chi(-1)\tau(\chi)}{N} \sum_{r \bmod N} \bar{\chi}(r) f(x) \mathbf{e}(xr/N)$$

Now the Fourier transform of $f(x) \mathbf{e}(xr/N)$ is given by

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathbf{e}(xr/N) \mathbf{e}(-\xi x) dx = \hat{f}\left(\xi - \frac{r}{N}\right)$$

Thus, by Poisson summation formula,

$$\begin{aligned}\sum_n \chi(n) f(n) &= \frac{\chi(-1)\tau(\chi)}{N} \sum_{r \bmod N} \sum_m \bar{\chi}(r) \hat{f}\left(n - \frac{r}{N}\right) \\ &= \frac{\tau(\chi)}{N} \sum_m \sum_{r \bmod N} \bar{\chi}(-r) \hat{f}\left(m - \frac{r}{N}\right) \\ &= \frac{\tau(\chi)}{N} \sum_n \bar{\chi}(n) \hat{f}\left(\frac{n}{N}\right).\end{aligned}\quad \square$$

§1.3.2 The L -function of a Dirichlet character

We then attach the L -function defined by

$$L(s, \chi) = \sum_n \chi(n) n^{-s} = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^{-s}}\right)$$

for $\Re s > 1$. For example, if χ is the trivial character (so $N = 1$), then $L(s, \chi) = \zeta$ is the Riemann zeta function.

Any time we have an L -function our goal will be to get an *analytic continuation* and a *functional equation*. For Dirichlet characters, both goals will be achieved by using the following so-called *theta function*.

Định nghĩa 1.3.2. Let $\varepsilon = \frac{1-\chi(-1)}{2}$ and define

$$\theta_\chi(t) = \frac{1}{2} \sum_n n^\varepsilon \chi(n) \exp(-\pi n^2 t).$$

Note that $\chi(0) = 0$ unless $N = 1$, which would cause $\chi(0) = 1$ (and actually $\chi \equiv 1$). It is clear that $\theta_\chi(t) - \frac{1}{2}\chi(0)$ decays rapidly as $t \rightarrow \infty$. We'll now show the following functional equation:

Proposition 1.3.3 (Functional equation of the theta function)

We have

$$\theta_\chi(t) = \frac{(-i)^\varepsilon \tau(\chi)}{N^{1+\varepsilon} t^{\varepsilon+1/2}} \theta_{\bar{\chi}}\left(\frac{1}{N^2 t}\right).$$

Chứng minh. By cases on whether $\varepsilon = 0$ or $\varepsilon = 1$; just apply twisted Poisson summation on $\exp(-\pi x^2 t)$ and $x \exp(-\pi x^2 t)$ respectively. $\square$

When $N > 1$, this means $\theta_\chi(t)$ decays rapidly to 0 as well. Let's assume momentarily that $N > 1$, and see what falls out when we compute the Mellin transform of θ_χ . It equals

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\theta_\chi, s) &= \sum_{n>0} n^\varepsilon \chi(n) \mathcal{M}(\exp(-\pi n^2 t), s) \\ &= \sum_{n>0} n^\varepsilon \chi(n) (\pi n^2)^{-s} \Gamma(s) \\ &= \Gamma(s) \pi^{-s} \sum_{n>0} n^\varepsilon \chi(n) n^{-2s} \\ &= \Gamma(s) \pi^{-s} L(2s - \varepsilon, \chi) \end{aligned}$$

Replacing s with $\frac{1}{2}(s + \varepsilon)$ and rearranging:

$$\mathcal{M}\left(\theta_\chi, \frac{s + \varepsilon}{2}\right) = \pi^{-\frac{1}{2}(s + \varepsilon)} \Gamma\left(\frac{s + \varepsilon}{2}\right) L(s, \chi).$$

Since Γ never vanishes, this gives the analytic continuation of $L(s, \chi)$.

When $N = 1$ and $\chi = \mathbf{1}$ is the trivial character we get $\theta_\chi(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta_\chi(1/t)$, and so $\theta_\chi(t)$ behaves like $\frac{1}{2\sqrt{t}}$ at zero, and the Mellin transform is defined. The same calculation gives

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\theta_1, s) &= \mathcal{M}(1/2, 0) + \sum_{n>0} \mathcal{M}(\exp(-\pi n^2 t), s) \\ &= 0 + \Gamma(s) \pi^{-s} L(2s - \varepsilon, \mathbf{1}) = \Gamma(s) \pi^{-s} \zeta(2s) \end{aligned}$$

so

$$\mathcal{M}(\theta_1, s/2) = \Gamma(s)\pi^{-s}L(2s - \varepsilon, 1) = \Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\zeta(s)$$

In this case, $\mathcal{M}(\theta_1, s/2)$ is meromorphic except for simple poles at $s = 0$ and $s = 1$ of residue 1.

The Mellin transforms we mentioned are usually called the completed L -functions as follows:

Theorem 1.3.4 (The Mellin transform of the theta function)

Define

$$\Lambda(s, \chi) = \mathcal{M}\left(\theta_\chi, \frac{s + \varepsilon}{2}\right) = \pi^{-\frac{1}{2}(s + \varepsilon)} \Gamma\left(\frac{s + \varepsilon}{2}\right) L(s, \chi).$$

Then $\Lambda(s, \chi)$ is analytic if $\chi \neq 1$; otherwise it is meromorphic, with simple poles at $s = 0$ and $s = 1$ of residue 1. Moreover, we have the functional equation

$$\Lambda(s, \chi) = \Lambda(1 - s, \chi).$$

Chứng minh. The first half of the theorem follows from Mellin transform properties. To show the functional equation, use Proposition 1.2.3 to clean everything up once the theta function is used.

$$\begin{aligned} \Lambda(s, \chi) &= \mathcal{M}\left(\theta_\chi(t), \frac{s + \varepsilon}{2}\right) = \mathcal{M}\left(\frac{(-i)^\varepsilon \tau(\chi)}{N^{1+\varepsilon} t^{\varepsilon+1/2}} \theta_{\bar{\chi}}\left(\frac{1}{N^2} t^{-1}\right), \frac{s + \varepsilon}{2}\right) \\ &= \frac{(-i)^\varepsilon \tau(\chi)}{N^{1+\varepsilon}} \cdot \mathcal{M}\left(t^{-(\varepsilon+1/2)} \theta_{\bar{\chi}}\left(\frac{1}{N^2} t^{-1}\right), \frac{s + \varepsilon}{2}\right) \\ &= \frac{(-i)^\varepsilon \tau(\chi)}{N^{1+\varepsilon}} \cdot \frac{\mathcal{M}\left(\theta_{\bar{\chi}}, \frac{\frac{s+\varepsilon}{2} - (\varepsilon+1/2)}{-1}\right)}{(N^2)^{\frac{s+\varepsilon}{2} - (\varepsilon+1/2)}} = \frac{(-i)^\varepsilon \tau(\chi)}{N^s} \cdot \mathcal{M}\left(\theta_{\bar{\chi}}, \frac{(1-s) + \varepsilon}{2}\right) \\ &= \frac{(-i)^\varepsilon \tau(\chi)}{N^s} \Lambda(\theta_{\bar{\chi}}, 1 - s). \end{aligned} \quad \square$$

§1.4 Linear algebraic groups

§1.4.1 Reductive groups

Định nghĩa 1.4.1. A linear algebraic group G over a field k is a closed subscheme of $\mathrm{GL}_n(k)$, i.e. a smooth affine group scheme over k .

Recall that a generic group H is

- **solvable** if the map $X \mapsto [X, X]$ starting from H eventually stabilizes; equivalently, there needs to be a normal series

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$$

where each G_i/G_{i-1} is abelian.

- **unipotent** if every element of the group is unipotent; this implies H is a closed subgroup of U_n .

Định nghĩa 1.4.2. Given a LAG G , we define

- its **radical** is the largest connected solvable normal subgroup;

- its **unipotent radical** is the largest connected unipotent normal subgroup.

We say G is

- **semisimple** if the radical is trivial;
- **reductive** if the unipotent radical is trivial.

Semisimple groups are considered pretty rigid, but reductive groups are not too much worse; from <https://mathoverflow.net/a/223895/70654>:

From the modern perspective the class of (connected) reductive groups is more natural than that of (connected) semisimple groups for the purposes of setting up a robust general theory, due to the fact that Levi factors of parabolics in reductive groups are always reductive but generally are not semisimple when the ambient group is semisimple. However, after some development of the basic theory one learns that reductive groups are just a fattening of semisimple groups via a central torus (e.g., GL_n versus SL_n), so Harish-Chandra had no trouble to get by in the semisimple case by just dragging along some central tori here and there in the middle of proofs.

Following non-obvious theorem is another motivation for why reductive groups are considered really nice:

Theorem 1.4.3

A smooth connected affine group over a field of characteristic 0 is reductive if and only if all of its algebraic representations are completely reducible.

§1.4.2 Parabolic and Borel subgroups

Định nghĩa 1.4.4. A **Borel subgroup** of G is

- a connected solvable subgroup variety B for which G/B is complete;
- or equivalently, a maximal Zariski-closed normal solvable subgroup (but not necessarily normal).

The Borel subgroups are all conjugate to each other.

Định nghĩa 1.4.5. A **parabolic subgroup** P of G is

- any subgroup containing a Borel subgroup;
- over an algebraically closed field, equivalently, such that G/P is a complete variety.

Example copied from Wikipedia: for $G = \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$, a Borel subgroup is

$$\left\{ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} : \det(A) \neq 0 \right\}$$

and the maximal proper parabolic subgroups of G containing B are:

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \right\}$$

Also, a maximal torus in B is

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} : a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} \neq 0 \right\} \cong \mathbb{G}_m^4$$

§1.4.3 Table

G	Radical	Unipotent radical	Borel subgroup
$\mathrm{GL}(n)$	$\mathbb{C}$ (diagonal matrices)	1	Upper tri
$\mathrm{SL}(n)$	1	1	
$\mathrm{O}(n)$		1	
$\mathrm{SO}(n)$		1	
$\mathrm{Sp}(n)$		1	
$\mathrm{U}(n)$		1	
$\mathbb{G}_a$	$\mathbb{G}_a$	$\mathbb{G}_a$	

II

Hàm sinh

2 Hàm Sinh

§2.1 Định nghĩa

Định nghĩa (Hàm sinh)

Cho dãy số thực $\{a_k | k \geq 0\}$ có vô hạn số hạng. Ta gọi hàm sinh của dãy $\{a_k | k \geq 0\}$ là chuỗi lũy thừa hình thức: $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$

Mệnh đề 2.1.1 — Từ định nghĩa trên ta cũng suy ra được mệnh đề sau: Dãy số thực có hữu hạn số hạng $\{a_k | p \leq k \leq q\}$ ($0 \leq p \leq q$) có hàm sinh vẫn là $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ với quy ước $a_k = 0$ khi $k < p$ hoặc $k > q$.

Ví dụ.

a) Dãy vô hạn $\{a_k = (-2)^k k! | k \geq 0\}$ và dãy hữu hạn $\{b_k = k^2 \ln(k) | 3 \leq k \leq 20\}$ có các hàm sinh lần lượt là:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = 1 - 2x + 8x^2 - 48x^3 + \dots \quad (2.1)$$

và

$$G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k = 9(\ln 3)x^3 + 16(\ln 4)x^4 + \dots + 400(\ln 20)x^{20} \quad (2.2)$$

Ở đây ta hiểu $b_k = 0$ khi $k < 3$ hoặc $k > 20$.

b) Xét tập hợp X có $|X| = n \geq 1$. Đặt a_k là số tập con có k phần tử trong X , $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, thì khi đó ta có $a_k = C_n^k$. Dãy số hữu hạn $\{a_k | 0 \leq k \leq n\}$ có hàm sinh là:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k = (x+1)^n \quad (2.3)$$

Ở đây ta hiểu $a_k = 0, \forall k > n$.

Nhận xét 2.1.2. Ở (2.3) ta đã sử dụng biến đổi của hệ số nhị thức: Hệ số nhị thức C_n^k là hệ số của x^k trong khai triển của nhị thức:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$$

c) Đặt $a_0 = b_0 = 0$, a_k là số các số nguyên dương $\leq k$ mà nguyên tố cùng nhau với k và b_k là số ước số nguyên dương của k , $\forall k \geq 1$. Các dãy số vô hạn $\{a_k | k \geq 0\}$ và $\{b_k | k \geq 0\}$ có các hàm sinh lần lượt là:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \dots \quad (2.4)$$

và

$$G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k = x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \dots \quad (2.5)$$

Để ý kĩ thì $\forall k$ nguyên tố ≥ 2 , ta có $a_k = k - 1$ và $b_k = 2$.

Nhận xét 2.1.3. Ở 2 hàm sinh (2.4) và (2.5), cần nhắc lại một số kiến thức về hàm số học: Đặt $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ là phân tích tiêu chuẩn của $n > 1$.

- Ký hiệu $d(n)$ là hàm số các ước nguyên dương của n . Khi đó:

$$d(n) = \sum_{i=0}^k (\alpha_i + 1) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1) \quad (2.6)$$

- Ký hiệu $\varphi(n)$ là hàm số các số nguyên dương không vượt quá n và nguyên tố cùng nhau với n . Khi đó:

$$\varphi(n) = n \sum_{i=0}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \quad (2.7)$$

§2.2 Bài toán tìm số nghiệm nguyên của phương trình

Ta sẽ bắt đầu với một ví dụ như sau:

Ví dụ. $\forall k \geq 0$, đặt a_k là số cách chọn k viên kẹo từ 1 viên kẹo dừa, 2 viên kẹo chanh, 3 viên kẹo me và 4 viên kẹo gừng. Viết hàm sinh của dãy số hữu hạn $\{a_k | k \geq 0\}$.

Chứng minh. $\forall k \geq 0$, a_k là số nghiệm nguyên của phương trình $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = k$ với $0 \leq e_i \leq i$ ($1 \leq i \leq 4$) trong đó e_1, e_2, e_3 và e_4 lần lượt là số viên kẹo dừa, chanh, me và gừng.

Để viết hàm sinh của $\{a_k | k \geq 0\}$, ta xây dựng các đa thức sao cho khi nhân chúng lại với nhau, ta được tất cả các số hạng có dạng $x^{e_1} x^{e_2} x^{e_3} x^{e_4}$, trong đó $0 \leq e_i \leq i$ ($1 \leq i \leq 4$).

Như vậy ta xây dựng các đa thức: $(1 + x)$, $(1 + x + x^2)$, $(1 + x + x^2 + x^3)$ và $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$ lần lượt cho e_1, e_2, e_3 và e_4 .

Do đó hàm sinh của dãy $\{a_k | k \geq 0\}$ là:

$$F(x) = (1 + x) \cdot (1 + x + x^2) \cdot (1 + x + x^2 + x^3) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4) \quad (2.8)$$

$$= 1 + 4x + 9x^2 + 15x^3 + 20x^4 + 22x^5 + 20x^6 + 15x^7 + 9x^8 + 4x^9 + x^{10} \quad (2.9)$$

□

Nhận xét 2.2.1. Ở ví dụ trên ta đã tìm được hàm sinh cho a_k là số cách chọn k viên kẹo từ 1 viên kẹo dứa, 2 viên kẹo chanh, 3 viên kẹo me và 4 viên kẹo gừng, là:

$$F(x) = 1 + 4x + 9x^2 + 15x^3 + 20x^4 + 22x^5 + 20x^6 + 15x^7 + 9x^8 + 4x^9 + x^{10} \quad (2.10)$$

Ta nhìn vào những hệ số a_i ($0 \leq i \leq 10$) có thể biết được ngay số cách chọn ra i viên kẹo thỏa yêu cầu bài toán. Ví dụ $a_4 = 20$ nghĩa là có 20 cách chọn ra 4 viên kẹo từ 1 viên kẹo dứa, 2 viên kẹo chanh, 3 viên kẹo me và 4 viên kẹo gừng.

§2.3 Từ tìm hệ số hàm sinh đến bài toán tổ hợp cơ bản

Ta sử dụng các kỹ thuật tính toán đại số để tìm các hệ số của các hàm sinh. Ta sẽ biến đổi một hàm sinh phức tạp về hàm sinh kiểu nhị thức hoặc tích của các hàm sinh kiểu nhị thức bằng cách áp dụng các công thức đại số ở Mệnh đề 3.2.1

Ví dụ 1 — Tìm hệ số của x^{20} trong $(x^3 + x^4 + x^5 + \dots)^4$

Lời giải. Trước tiên ta có những biến đổi sau:

$$(x^3 + x^4 + x^5 + \dots)^4 = x^{12}(1 + x + x^2 + \dots)^4 = x^{12} \frac{1}{(1-x)^4} = x^{12} \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+3}^k \cdot x^k \quad (2.11)$$

Từ đây ta suy ra hệ số của x^{20} trong $(x^3 + x^4 + x^5 + \dots)^4$ chính là hệ số của x^8 trong biểu thức $C_{k+3}^k \cdot x^k$. Thay $k = 8$ vào $C_{k+3}^k \cdot x^k$, ta có được hệ số cần tìm là $C_{11}^8 = 165$.

Ví dụ 2 — 20 bạn quyên góp vở cho học sinh nghèo. Bạn đầu tiên góp 1 hoặc 2 hoặc 5 cuốn vở. 19 bạn còn lại mỗi người góp 3 hoặc 4 cuốn vở. Hỏi có bao nhiêu cách quyên góp để thu được 76 cuốn vở ?

Lời giải.

$\forall k \geq 0$, đặt a_k là số cách quyên góp k cuốn vở của 20 bạn đã nói ở trên.

Ta cần tìm a_{76} = số nghiệm nguyên của phương trình $e_1 + e_2 + \dots + e_{20} = 76$, trong đó $e_1 \in \{1, 2, 5\}$ và $e_i \in \{3, 4\}$, với $2 \leq i \leq 20$.

Hàm sinh của $\{a_k | k \geq 0\}$ là:

$$F(x) = (x + x^2 + x^5)(x^3 + x^4)^{19} = x^{58}(1 + x + x^4)(1 + x)^{19} \quad (2.12)$$

Muốn tìm hệ số của x_{76} trong $F(x)$, ta tìm hệ số của x_{18} trong $(1 + x + x^4)(1 + x)^{19}$. Ta đặt các đa thức sau:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \cdot x^k = 1 + x + x^4 \quad (2.13)$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \cdot x^k = (1 + x)^{19} = \sum_{k=0}^{19} C_{19}^k \cdot x^k = 1 + C_{19}^1 \cdot x^1 + C_{19}^2 \cdot x^2 + \dots + C_{19}^{19} \cdot x^{19} \quad (2.14)$$

và

$$h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k \cdot x^k = (1 + x + x^4) \cdot (1 + x)^{19} = f(x) \cdot g(x) \quad (2.15)$$

Ta nhận thấy chuỗi $h(x)$ thỏa mãn tính chất là một tích Cauchy của các chuỗi $f(x)$ và $g(x)$. Áp dụng **Tích Cauchy** hay **Định lý về Quy tắc xoắn** (có thể coi ở 3.2.1), ta được:

$$\begin{aligned} d_{18} &= \sum_{i=0}^{18} b_i c_{18-i} = b_0 \cdot c_{18} + b_1 \cdot c_{17} + b_4 \cdot c_{14} \\ &= 1_{19}^{18} + 1_{19}^{17} + 1_{19}^{14} = 19 + 171 + 11628 = 11818 \end{aligned}$$

Vậy có 11818 cách quyên góp để thu được 76 cuốn vở.

Ví dụ 3 — Có bao nhiêu cách xếp 30 bút y hết nhau vào 8 hộp sao cho hộp 1 có không quá 12 bút và các hộp còn lại mỗi hộp có ít nhất 2 bút ?

Lời giải.

$\forall k \geq 0$, đặt a_k là số cách xếp k bút vào 8 hộp thỏa yêu cầu của bài toán.

Ta cần tìm a_{30} = số nghiệm nguyên của phương trình $e_1 + e_2 + \dots + e_8 = 30$, trong đó $0 \leq e_1 \leq 12$ và $e_i \geq 2$ với $2 \leq i \leq 8$

Hàm sinh của $\{a_k | k \geq 0\}$ là:

$$\begin{aligned} F(x) &= (1 + x + x^2 + \dots + x^{12}) \cdot (x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^7 \\ &= x^{14} \cdot (1 + x + x^2 + \dots + x^{12}) \cdot (1 + x + x^2 + \dots)^7 \end{aligned}$$

Muốn tìm hệ số của x^{30} trong $F(x)$, ta tìm hệ số của x^{16} trong biểu thức:

$$\begin{aligned} h(x) &= (1 + x + \dots + x^{12}) \cdot (1 + x + x^2 + \dots)^7 \\ &= \frac{1 - x^{13}}{1 - x} \cdot \frac{1}{(1 - x)^7} = (1 - x^{13}) \cdot \frac{1}{(1 - x)^8} \\ &= (1 - x^{13}) \cdot (C_7^0 \cdot x^0 + C_8^1 \cdot x^1 + C_9^2 \cdot x^2 + C_{10}^3 \cdot x^3 + \dots) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot x^k \end{aligned}$$

Như vậy hệ số cần tìm là $a_{16} = 1 \cdot C_{23}^{16} - 1 \cdot C_{10}^3 = 245157 - 120 = 245037$

Ví dụ 4 (Chọn đội tuyển PTNK 2009) — Có bao nhiêu số có n chữ số, mà các chữ số thuộc tập $\{2, 3, 7, 9\}$ và số đó chia hết cho 3?

3 Các nội dung - công cụ hỗ trợ tính toán

§3.1 Khai triển Taylor và Mac-laurin

Theorem 3.1.1 (Nhị thức Newton mở rộng)

Với mọi $n \in \mathbb{R}$ và $|x| < 1$, ta có:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k = C_n^0 + C_n^1 \cdot x + C_n^2 \cdot x^2 + \dots + C_n^{n-1} \cdot x^{n-1} + C_n^n \cdot x^n \quad (3.1)$$

Chứng minh. Người đọc có thể tham khảo thêm về chuyên đề Nhị thức Newton cũng như cách chứng minh lại các công thức ở [Nhị thức Newton](#) $\square$

Theorem 3.1.2 (Khai triển Taylor với phần dư Peano)

Cho hàm số f khả vi đến cấp $n-1$ trên một lân cận U của x_0 và tồn tại $f^{(n)}(x_0)$. Khi đó ta có công thức khai triển Taylor cấp n của hàm f tại x_0 với phần dư Peano sau đây:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (3.2)$$

+ $\vartheta((x-x_0)^n)$ khi $x \rightarrow x_0$.

Số hạng $\vartheta((x-x_0)^n)$ được gọi là **phần dư Peano** và được định nghĩa là biểu thức sao cho $\frac{\vartheta((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n} \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow x_0$.

Đa thức $Tf_{n,x_0}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ được gọi là **đa thức Taylor bậc n của f tại x_0** .

Chứng minh. Ta cần chứng minh giới hạn sau:

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - Tf_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0. \quad (3.3)$$

Thật vậy, chú ý giới hạn cần tính là một dạng vô định $\frac{0}{0}$ nên ta có thể áp dụng quy tắc L' Hôpital để tính giới hạn đó. Để khử hoàn toàn dạng vô định ta cần đạo hàm $n-1$ lần tử số và mẫu số của giới hạn cần tính. Khi đó ta sẽ thu được giới hạn sau đây:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!(x-x_0)} \quad (3.4)$$

Rõ ràng giới hạn cuối cùng này bằng 0 theo định nghĩa của $f^{(n)}(x_0)$. Vậy $L = 0$. Ta có điều phải chứng minh! $\square$

Nhận xét 3.1.3 (Khai triển Taylor). Đây là phát biểu ngắn gọn và sơ cấp hơn cho khai triển Taylor

Cho hàm số $f(x)$ khả vi vô hạn lần tại $x = a$ với a là một số thực, khi đó $f(x)$ có thể được khai triển như sau:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (3.5)$$

Trong đó $f^{(n)}(a)$ là đạo hàm n lần của f tại $x = a$. Khi cho $a = 0$, ta có được khai triển Mac-laurin:

Theorem 3.1.4 (Khai triển Mac-laurin)

Cho hàm số $f(x)$ khả vi vô hạn lần tại $x = 0$, khi đó $f(x)$ có thể được khai triển như sau:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (3.6)$$

§3.2 Một số công thức khai triển đại số

Mệnh đề 3.2.1 — Ta có một số công thức để thuận tiện tính toán như sau:

$$a) \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \quad (n \geq 1)$$

$$b) (1 + x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot x^k = C_n^0 \cdot x^0 + C_n^1 \cdot x^1 + C_n^2 \cdot x^2 + \dots + C_n^n \cdot x^n \quad (n \geq 1)$$

$$c) (1 - x^m)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \cdot x^{k \cdot m} = C_n^0 \cdot x^0 - C_n^1 \cdot x^m + C_n^2 \cdot x^{2m} + \dots + (-1)^n C_n^n \cdot x^{n \cdot m} \\ (m, n \geq 1)$$

$$d) \frac{1}{1 - x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \text{ và } \frac{1}{1 + x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$e) \frac{1}{(1 - x)^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+(n-1)}^k \cdot x^k = C_{n-1}^0 \cdot x^0 + C_n^1 \cdot x^1 + C_{n+1}^2 \cdot x^2 + C_{n+2}^3 \cdot x^3 + \dots$$

§3.3 Một số nội dung giải tích quan trọng khác

Ở trên, ta đã giới thiệu một định nghĩa căn bản của hàm sinh. **Tuy nhiên**, các khái niệm tác giả đưa ra trong chuyên đề này chưa chắc là chính xác và chuẩn nghĩa mà chỉ để dễ dàng diễn đạt những ý muốn nói của tác giả cho các bài toán.

Như ở dưới đây, ta sẽ viết lại định nghĩa hàm sinh theo một cách khác để thuận tiện cho phần này.

Định nghĩa

Cho một dãy số $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ thì ta gọi $A(x)$ là hàm sinh của dãy số trên nếu:

$$A(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot x^k = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n + \dots \quad (3.7)$$

Ta có thể ký hiệu khác như sau:

$$\langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \rangle \leftrightarrow A(x) \quad (3.8)$$

hay

$$\langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \rangle \leftrightarrow a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n + \dots \quad (3.9)$$

Dựa trên định nghĩa vừa rồi của hàm sinh thì ta có một số các phép toán trên hàm sinh như sau:

Quy tắc cộng. Nếu $\langle f_0, f_1, f_2, \dots \rangle \leftrightarrow F(x)$ và $\langle g_0, g_1, g_2, \dots \rangle \leftrightarrow G(x)$ thì:

$$\langle f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \dots \rangle \leftrightarrow F(x) + G(x) \quad (3.10)$$

Quy tắc dịch chuyển sang phải. Nếu $\langle f_0, f_1, f_2, \dots \rangle \leftrightarrow F(x)$ thì:

$$\langle 0, 0, \dots, 0, f_0, f_1, f_2, \dots \rangle \leftrightarrow x^k \cdot F(x) \quad (3.11)$$

trong đó k là số số 0.

Quy tắc đạo hàm. Nếu $\langle f_0, f_1, f_2, \dots \rangle \leftrightarrow F(x)$ thì:

$$\langle f_1, 2f_2, 3f_3, \dots \rangle \leftrightarrow \frac{dF(x)}{dx} \quad (3.12)$$

Mệnh đề 3.3.1 (Tích Cauchy của các chuỗi lũy thừa hình thức) — Gọi lần lượt 2

chuỗi hình thức $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot x^k$ và $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \cdot x^k$

Đặt $h(x) = f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \cdot x^k$ thì khi đó:

$$c_k = \sum_{i=0}^k a_i \cdot b_{k-i} = a_0 \cdot b_k + a_1 \cdot b_{k-1} + a_2 \cdot b_{k-2} + \dots + a_k \cdot b_0, \forall k \geq 0 \quad (3.13)$$

Ở đây, chuỗi $h(x)$ được gọi là **tích Cauchy** của các chuỗi $f(x)$ và $g(x)$. Nếu là áp dụng cho các hàm sinh thì ta cũng có thể dùng thuật ngữ tương tự là **Quy tắc xoắn**.

4 Các khái niệm mở rộng từ hàm sinh

Trong chương này, tác giả trình bày một số nội dung mở rộng từ khái niệm hàm sinh thông thường, bao gồm: Hàm sinh của số phép phân hoạch, Hàm sinh mũ và Hàm sinh đa biến. **Hàm sinh xác suất** cũng là một nội dung thú vị, song ta không bàn luận chủ đề này vì các nội dung được trình bày chủ yếu phục vụ các bạn học sinh thi Olympic Toán cấp THPT. Bạn có thể tham khảo về Hàm sinh xác suất tại [đây](#)

§4.1 Hàm sinh của phép phân hoạch

§4.1.1 Sự phân hoạch số nguyên dương

Định nghĩa (Sự phân hoạch của số nguyên dương)

Cho số nguyên dương n . Nếu có các số nguyên dương $n_1, n_2, \dots, n_r$ thỏa $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r$ và $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ thì ta nói $(n_1, n_2, \dots, n_r)$ là một **phép phân hoạch** của n . Khi đó phân hoạch (n) là **phép phân hoạch tầm thường** của n .

Ví dụ. 6 có 11 phân hoạch là (6) , $(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(1, 1, 4)$, $(1, 2, 3)$, $(2, 2, 2)$, $(1, 1, 1, 3)$, $(1, 1, 2, 2)$, $(1, 1, 1, 1, 2)$ và $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Ta nói (6) là phép phân hoạch tầm thường của 6.

§4.1.2 Hàm sinh của phép phân hoạch

Ta xây dựng hàm sinh cho dãy vô hạn $\{a_k | k \geq 0\}$ với $a_0 = 1$ và a_k là số phân hoạch của số nguyên dương k , $\forall k \geq 1$.

Một phép phân hoạch của k được xác định khi ta biết số lượng các số nguyên dương 1, 2, 3, ..., k được sử dụng trong phép phân hoạch đó.

Gọi e_i là số lần số nguyên dương i được dùng trong một phép phân hoạch của k ($1 \leq i \leq k$), ta có phương trình:

$$1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + \dots + k \cdot e_k = k \quad (4.1)$$

Như vậy a_k là số nghiệm nguyên không âm của phương trình (4.1). Ta sẽ xây dựng các đa thức sao cho khi nhân các đa thức đó với nhau, ta được các số hạng có dạng:

$$x^{e_1} \cdot x^{2e_2} \cdot x^{3e_3} \dots x^{ke_k} \dots \quad (4.2)$$

Ta lần lượt xây dựng các đa thức $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ (cho e_1), $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$ (cho $2 \cdot e_2$), ... và $1 + x^k + x^{2 \cdot k} + x^{3 \cdot k} + \dots$ (cho $k \cdot e_k$).

Như vậy hàm sinh cần tìm là:

$$\begin{aligned} F(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) \cdot (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots) \cdots (1 + x^k + x^{2 \cdot k} + x^{3 \cdot k} + \dots) \\ &= \frac{1}{(1-x) \cdot (1-x^2) \cdots (1-x^k) \cdots} \end{aligned}$$

§4.2 Hàm sinh mũ

§4.2.1 Định nghĩa

Định nghĩa (Hàm sinh mũ)

Cho dãy số thực vô hạn $\{a_k | k \geq 0\}$. **Hàm sinh mũ** của dãy $\{a_k | k \geq 0\}$ là chuỗi lũy thừa hình thức:

$$E(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} \cdot x^k = \frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!} \cdot x^1 + \frac{a_2}{2!} \cdot x^2 + \frac{a_3}{3!} \cdot x^3 + \dots$$

Mệnh đề 4.2.1 — Từ định nghĩa trên ta cũng suy ra được mệnh đề sau:

Dãy số thực hữu hạn $\{a_k | p \leq k \leq q\}$ ($0 \leq p \leq q$) có hàm sinh mũ vẫn là

$$E(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} \cdot x^k \text{ nhưng với quy ước } a_k = 0 \text{ khi } k < p \text{ hoặc } k > q.$$

Ví dụ.

a) Dãy vô hạn $\{a_k = (-2)^k k! | k \geq 0\}$ và dãy hữu hạn $\{b_k = k^2 \ln(k) | 3 \leq k \leq 20\}$ có các hàm sinh mũ lần lượt là:

$$E(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} \cdot x^k = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \dots \quad (4.3)$$

và

$$G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{k!} \cdot x^k = \frac{3}{2}(\ln 3) \cdot x^3 + \frac{2}{3}(\ln 4) \cdot x^4 + \dots + \frac{20}{19!}(\ln 20) \cdot x^{20} \quad (4.4)$$

Ở đây ta hiểu $b_k = 0$ khi $k < 3$ hoặc $k > 20$.

b) Xét tập hợp X có $|X| = n \geq 1$. Đặt a_k là số cách chọn ra k phần tử trong X rồi xếp vào k vị trí mà không xếp trùng, $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, thì khi đó ta có $a_k = A_n^k$. Dãy hữu hạn $\{a_k | 0 \leq k \leq n\}$ có hàm sinh mũ là:

$$E(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=0}^n \frac{A_n^k}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k = (x+1)^n \quad (4.5)$$

Ở đây ta hiểu $a_k = 0, \forall k > n$.

§4.2.2 Các công thức cơ bản dùng cho hàm sinh mũ

Mệnh đề 4.2.2 — Ta có một số công thức để thuận tiện tính toán như sau:

$$a) e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$b) e^{nx} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(n \cdot x)^k}{k!} = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n^2 \cdot x^2}{2!} + \frac{n^3 \cdot x^3}{3!} + \dots$$

$$\begin{aligned}
\text{c)} \quad & \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \\
\text{d)} \quad & \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \\
\text{e)} \quad & \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots
\end{aligned}$$

Ở đây các công thức từ (b), (c) và (d) được suy ra từ (a). Công thức (a) và (e) ta sẽ chứng minh bằng **khai triển Mac-laurin** như sau:

(a) Xét hàm số $f(x) = e^x$ khả vi tại $x = 0$. Khi đó ta dễ dàng có được $f^{(n)}(x) = f(x) = e^x$. Theo Mac-laurin, $f(x)$ được khai triển như sau:

$$\begin{aligned}
e^x &= f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \\
&= f(0) + \frac{f(0)}{1!}x + \frac{f(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f(0)}{n!}x^n + \dots \\
&= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots \\
&= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots
\end{aligned}$$

(e) Xét hàm số $f(x) = \ln(1+x)$ khả vi tại $x = 0$. Khi đó ta quy nạp chứng minh được $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$. Khi đó:

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(0) &= (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \\
\Leftrightarrow \frac{f^{(n)}(0)}{n!} &= \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \Leftrightarrow \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}
\end{aligned}$$

Vậy theo Mac-laurin, $f(x)$ được khai triển như sau:

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \\
&= \ln(1) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots
\end{aligned}$$

§4.2.3 Hàm sinh mũ ứng dụng trong các bài toán đếm có yêu cầu sắp thứ tự

Hàm sinh dùng trong các bài toán đếm số nghiệm nguyên có điều kiện của một phương trình. Hàm sinh mũ được dùng có hiệu quả trong các bài toán đếm có **yêu cầu thêm việc sắp xếp thứ tự**.

Ví dụ 5 — $\forall k \geq 0$, đặt a_k là số cách sắp xếp có thứ tự k vật chọn từ n loại vật khác nhau. Tính $a_k, \forall k \geq 0$

Chứng minh. Trước hết, ta có hàm sinh mũ của $\{a_k | k \geq 0\}$ là:

$$\begin{aligned}
E(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} \cdot x^k = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^n \\
&= e^{nx} = 1 + \frac{n \cdot x}{1!} + \frac{n^2 \cdot x^2}{2!} + \frac{n^3 \cdot x^3}{3!} + \dots
\end{aligned}$$

Từ đây suy ra $\forall k \geq 0, \frac{a_k}{k!} = \frac{n^k}{k!}$, nghĩa là $a_k = n^k$ □

Ví dụ 6 — $\forall k \geq 0$, đặt a_k là số cách sắp xếp k khách vào 3 phòng khác nhau sao cho không có phòng trống. Tính $a_k, \forall k \geq 0$

Chứng minh. Trước hết, ta có hàm sinh mũ của $\{a_k | k \geq 0\}$ là:

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} \cdot x^k = \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right)^3 \\ &= (e^x - 1)^3 = e^{3x} - e^{2x} + e^x - 1 \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{k!} x^k - 3 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} x^k + 3 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k - 1 \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k - 3 \cdot 2^k + 3}{k!} x^k - 1 \end{aligned}$$

Vậy ta suy ra $\forall k \geq 1$ thì $\frac{a_k}{k!} = \frac{3^k - 3 \cdot 2^k + 3}{k!}$. Do đó $a_0 = 0$ và $a_k = 3^k - 3 \cdot 2^k + 3, \forall k \geq 1$ □

Ví dụ 7 — $\forall k \geq 0$, đặt a_k là số chuỗi ký tự có k mẫu tự lấy từ $\{u, v, w, t\}$ sao cho trong chuỗi xuất hiện u ít nhất 2 lần và có w . Viết hàm sinh mũ của dãy $\{a_k | k \geq 0\}$.

Chứng minh. $\forall k \geq 0$, xét phương trình như sau:

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = k \quad (4.6)$$

trong đó e_1, e_2, e_3, e_4 lần lượt là số lần xuất hiện của u, v, w và t trong chuỗi có k mẫu tự ($e_1 \geq 2, e_2 \geq 0, e_3 \geq 1, e_4 \geq 0$ và các e_i đều nguyên)

Mỗi nghiệm (e_1, e_2, e_3, e_4) của phương trình (4.6) trên cho ta số chuỗi ký tự là:

$$\frac{(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)!}{e_1! e_2! e_3! e_4!} = \frac{k!}{e_1! e_2! e_3! e_4!} \quad (4.7)$$

Đây là số phép hoán vị lặp trên chuỗi ký tự. Ta có $\forall k \geq 0, a_k = \sum \frac{k!}{e_1! e_2! e_3! e_4!}$.

Từ đây cũng suy ra $\frac{a_k}{k!} \cdot x^k = \sum \frac{x^{e_1}}{e_1!} \frac{x^{e_2}}{e_2!} \frac{x^{e_3}}{e_3!} \frac{x^{e_4}}{e_4!}$ vì $k = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$.

Có thể nhận thấy cả hai tổng trên đều lấy trên tất cả các nghiệm (e_1, e_2, e_3, e_4) của phương trình (4.6).

Để viết hàm sinh mũ của dãy $\{a_k | k \geq 0\}$, ta xây dựng các đa thức sao cho khi nhân chúng lại với nhau, ta được tất cả các số hạng có dạng $\frac{x^{e_1}}{e_1!} \frac{x^{e_2}}{e_2!} \frac{x^{e_3}}{e_3!} \frac{x^{e_4}}{e_4!}$ mà trong đó $e_1 \geq 2, e_2 \geq 0, e_3 \geq 1$ và $e_4 \geq 0$.

Ta viết hàm sinh mũ của dãy a_k như sau:

$$\begin{aligned}
 E(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} \cdot x^k = \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots\right)^2 \\
 &= (e^x - 1 - x) \cdot (e^x - 1) \cdot e^{2x} = (e^{2x} - 2 \cdot e^x + 1 - x \cdot e^x + x) \cdot e^{2x} \\
 &= e^{4x} - 2 \cdot e^{3x} - x \cdot e^{3x} + e^{2x} + x \cdot e^{2x} \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4^k}{k!} x^k - 2 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{k!} x^k - x \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{k!} x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} x^k - x \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} x^k \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4^k}{k!} x^k - 2 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{k!} x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{k!} x^{k+1} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} x^{k+1}
 \end{aligned}$$

Để ý $a_0 = 0$, ta biến đổi các tổng lấy từ số hạng $k = 1$ trở đi thì được hàm sinh mũ của $\{a_k | k \geq 1\}$ là:

$$\begin{aligned}
 E(x) &= \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4^k}{k!} x^k\right) - 2 \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k}{k!} x^k\right) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^{k-1}}{(k-1)!} x^k + \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} x^k\right) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{k-1}}{(k-1)!} x^k \\
 &= (1 - 2 + 1) + \sum_{k=1}^{+\infty} x^k \cdot \left(\frac{4^k}{k!} - 2 \cdot \frac{3^k}{k!} - \frac{3^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{2^k}{k!} - \frac{2^{k-1}}{(k-1)!}\right) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4^k - 2 \cdot 3^k - k \cdot 3^{k-1} + 2^k - k \cdot 2^{k-1}}{k!} \cdot x^k \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4^k - (6+k) \cdot 3^{k-1} + (2+k) \cdot 2^{k-1}}{k!} \cdot x^k
 \end{aligned}$$

Vậy ta suy ra $\forall k \geq 1$ thì:

$$\frac{a_k}{k!} = \frac{4^k - (6+k) \cdot 3^{k-1} + (2+k) \cdot 2^{k-1}}{k!} \Leftrightarrow a_k = 4^k - (6+k) \cdot 3^{k-1} + (2+k) \cdot 2^{k-1}$$

□

Nhận xét 4.2.3. Ở ví dụ 6, yêu cầu của đề là **Tính** a_k nên sau khi đã tìm ra công thức của hàm sinh mũ, ta tiếp tục áp dụng các công thức ở Mệnh đề 4.2.2 để tìm công thức của a_k theo k . Còn ở ví dụ 7, yêu cầu chỉ là **Viết hàm sinh mũ của dãy** $\{a_k | k \geq 0\}$ nên ta có thể dừng lại ở bước:

$$E(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} \cdot x^k = \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots\right)^2$$

Với ví dụ 6, $a_k = 3^k - 3 \cdot 2^k + 3$, $\forall k \geq 1$, ta có thể hiểu như sau: Số cách sắp xếp k khách ($k \geq 1$) vào 3 phòng khác nhau sao cho không có phòng trống là $3^k - 3 \cdot 2^k + 3$. Ví dụ: Số cách sắp xếp 4 khách vào 3 phòng khác nhau sao cho không có phòng trống là $a_4 = 36$.

Với ví dụ 7, $a_k = 4^k - (6+k) \cdot 3^{k-1} + (2+k) \cdot 2^{k-1}$, $\forall k \geq 1$. Điều này có thể hiểu như sau: Số chuỗi ký tự có k mẫu tự ($k \geq 1$) lấy từ $\{u, v, w, t\}$ sao cho trong chuỗi xuất hiện u ít nhất 2 lần và có w là $4^k - (6+k) \cdot 3^{k-1} + (2+k) \cdot 2^{k-1}$. Ví dụ: Số chuỗi ký tự có 4 mẫu tự lấy từ $\{u, v, w, t\}$ sao cho trong chuỗi xuất hiện u ít nhất 2 lần và có w là $a_4 = 48$.

Ví dụ 8 — $\forall k \geq 0$, đặt a_k là số cách xếp có thứ tự k vật được chọn từ 5 loại vật khác nhau sao cho loại 1 và 2 có ít nhất 3 vật cho mỗi loại, loại 3, 4 và 5 có số vật từ 2 đến 4 vật cho mỗi loại. Viết hàm sinh mũ của dãy $\{a_k | k \geq 0\}$.

Chứng minh. Ta có hàm sinh mũ của $\{a_k | k \geq 0\}$ là:

$$E(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} \cdot x^k = \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6} + \dots\right)^2 \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots\right)^3$$

□

Ví dụ 9 — $\forall k \geq 0$, đặt a_k là số cách xếp k người vào 5 căn phòng khác nhau sao cho không có phòng nào trống, phòng 4 và 5 có số người ở mỗi phòng là bội số của 3. Viết hàm sinh mũ của dãy $\{a_k | k \geq 0\}$.

Chứng minh. Ta có hàm sinh mũ của $\{a_k | k \geq 0\}$ là:

$$E(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} \cdot x^k = \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)^3 \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \dots\right)^2$$

□

Ví dụ 10 — $\forall k \geq 0$, đặt a_k là số cách xếp k người vào 4 căn phòng khác nhau sao cho phòng 1 và 2 có không quá 3 người cho mỗi phòng, phòng 3 có số người chẵn và phòng 4 có số người lẻ. Viết hàm sinh mũ của dãy $\{a_k | k \geq 0\}$.

Chứng minh. Ta có hàm sinh mũ của $\{a_k | k \geq 0\}$ là:

$$E(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} \cdot x^k = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)^2 \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots\right) \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots\right)$$

□

§4.3 Hàm sinh đa biến

Thông thường, để biết **thông tin** về một dãy số ta xét hàm sinh cho dãy số đó. Đối với các bài toán đòi hỏi công thức tường minh cho số hạng của dãy hoặc chứng minh đẳng thức về dãy tức là ta chỉ cần **nhắc bắt được một thông tin** về dãy, khi đó ta chỉ cần xét **hàm sinh cho một biến**.

Vậy thế nào là “thông tin”? Ta sẽ gán cho mỗi một thông tin ứng với một biến. Ví dụ, với một phần tử a của dãy ta có hai lựa chọn là hoặc a được chọn hoặc là nó không được chọn, do đó biểu diễn hàm sinh cho a là $x^0 + x^1 = 1 + x$ như vậy ta có hàm sinh cho dãy gồm n phần tử được chọn là $(1 + x)^n$. Ở đây **thông tin là sự xuất hiện của phần tử trong dãy**.

Ví dụ 11 — [Chọn đội tuyển PTNK 2009] Có bao nhiêu số có n chữ số, mà các chữ số thuộc tập $\{2, 3, 7, 9\}$ và số đó chia hết cho 3?

Ta tiếp cận bài toán mở đầu phần **Hàm sinh đa biến** như trên

Nhận xét 4.3.1. Như ở phần **Hàm sinh** đã giới thiệu, khi ta cần biết chính xác công thức của dãy, thông thường ta chỉ tính được hệ số hoặc giá trị của hàm sinh tại điểm nào đó (như thế là quá đủ).

Ta đưa số các đại lượng cần tính về việc tính hệ số của hàm sinh. Tuy nhiên đối với **Ví dụ 11** lại khác. Đại lượng cần tính lại là tổng của vài số hạng nào đó của dãy, do đó loại hàm sinh ta cần xét là **dãy các số mũ** trong hàm sinh.

Ở phần **Hàm sinh đa biến** này, ta sẽ làm quen với sự kết hợp giữa hàm sinh với số phức để tính toán. Nội dung này không còn xa lạ mà đã từng được lên bài viết của thầy **Đặng Hùng Thắng** trên tạp chí Toán học & Tuổi trẻ: “**Dùng cái ảo đếm cái thực**”.

§4.3.1 Định lý

Người đọc sẽ cần nắm vững những nội dung cơ bản sau đây để nắm bắt tốt hơn phần này:

Định nghĩa (Căn nguyên thủy của đơn vị)

Căn bậc n của đơn vị là các giá trị $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{2k\pi}{n}$ với $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ (có tất cả n giá trị).

Khi đó thì $\varepsilon_k = e^{i \cdot \frac{2k\pi}{n}}$ và xét k bất kỳ từ 1 đến $n-1$, ta được:

$$\varepsilon_k^n = \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{2k\pi}{n} \right)^n = \cos(2k\pi) + i \cdot \sin(2k\pi) = 1 \quad (4.8)$$

Do đó ta có thể thấy các giá trị ε_k này đều là nghiệm của phương trình $\varepsilon^n = 1$.

Căn nguyên thủy bậc n của đơn vị là các số ε sao cho $\varepsilon^n = 1$ sao cho tập hợp $\{\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^n\}$ có đúng n phần tử hay tập hợp này là **tất cả các căn bậc n của 1**.

Nhận xét 4.3.2. Ở (4.8), ta đã biến đổi bằng **công thức Moivre**:

$$(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^n = \cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi)$$

Người đọc có thể tham khảo một vài kiến thức căn bản về số phức ở **đây**

Theorem 4.3.3

Nếu $\gcd(n, k) = 1$ thì ε_k là một căn nguyên thủy bậc n của đơn vị.

Theorem 4.3.4

Xác định $\varepsilon = e^{2i\pi/n}$ với n là một số nguyên dương. Xét đa thức bất kỳ:

$$F(x) = f_0 + f_1 \cdot x + f_2 \cdot x^2 + \dots$$

Trong đó $f_k = 0$ với $k > \deg F$. Khi đó ta có tổng:

$$f_0 + f_n + f_{2n} + \dots = \frac{1}{n} \cdot [F(1) + F(\varepsilon) + \dots + F(\varepsilon^{n-1})]$$

Chứng minh. Với k nguyên dương, xét tổng s_k như sau:

$$s_k = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{k \cdot j} = 1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2 \cdot k} + \dots + \varepsilon^{(n-1) \cdot k} \quad (4.9)$$

Nhận xét 4.3.5. Để ý là định lý 4.3.7 có thể viết lại như sau:

$$\sum_{j=0}^{n-1} e^{-\frac{i2\pi \cdot k \cdot j}{n}} = \begin{cases} n & \text{nếu } n|k \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

Đến đây ta chia 2 trường hợp của k để áp dụng định lý 4.3.7 với tổng s_k .

- Với k thỏa $n|k$ thì $s_k = n$.
- Với k sao cho k không chia hết cho n thì $s_k = 0$.

Khi đó ta tính được tổng sau:

$$\begin{aligned} F(1) + F(\varepsilon) + \dots + F(\varepsilon^{n-1}) &= \sum_{i=0}^{+\infty} f_i \cdot s_i = f_0 \cdot s_0 + f_1 \cdot s_1 + f_2 \cdot s_2 + \dots \\ &= n \cdot f_0 + \underbrace{0 \cdot f_1 + \dots + 0 \cdot f_{n-1}}_{\text{các tổng } s_i \text{ này đều bằng } 0} + n \cdot f_n + \dots + n \cdot f_{2n} + \dots \\ &= n \cdot (f_0 + f_n + f_{2n} + \dots) \end{aligned}$$

Vậy ta suy ra được kết quả như sau:

$$f_0 + f_n + f_{2n} + \dots = \frac{1}{n} \cdot [F(1) + F(\varepsilon) + \dots + F(\varepsilon^{n-1})] \quad (4.10)$$

Đây là điều phải chứng minh! □

Theorem 4.3.6

Đạo hàm của hàm số $F(x) = \prod_{i=1}^n f_i(x)$, trong đó $f_i(x)$ là các hàm khả vi với biến x , là:

$$F'(x) = F(x) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{f_i'(x)}{f_i(x)}$$

Chứng minh. Định lý này có thể chứng minh đơn giản bằng quy nạp theo n . Với $n = 2$ ta áp dụng quy tắc tính đạo hàm của tích hai hàm số. $\square$

Theorem 4.3.7

Giả sử n, k là các số nguyên dương, $n > 1$. Khi đó:

$$\sum_{j=1}^{n-1} e^{-\frac{i2\pi \cdot k \cdot j}{n}} = \begin{cases} n-1 & \text{nếu } n|k \\ -1 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

Chứng minh. Đầu tiên, xem xét chuỗi hình thức ở trên:

$$1, e^{-i2\pi/n}, e^{-i4\pi/n}, \dots, e^{-i2\pi k/n}, \dots, e^{-i2\pi(n-1)k/n} \quad (4.11)$$

Nếu $n|k$ thì $e^{-\frac{i2\pi \cdot k \cdot j}{n}} = e^{-i2\pi \cdot k' \cdot j}$, với $k' = \frac{k}{n}$ là một số nguyên dương. Theo **Công thức Moivre** thì

$$e^{-i2\pi \cdot k' \cdot j} = \cos(-2\pi k' \cdot j) + i \cdot \sin(-2\pi k' \cdot j) = 1 \quad (4.12)$$

Do đó, tổng các phần tử của dãy sẽ là:

$$\sum_{j=1}^{n-1} e^{-\frac{i2\pi \cdot k \cdot j}{n}} = \sum_{j=1}^{n-1} e^{-i2\pi \cdot k' \cdot j} = \sum_{j=1}^{n-1} 1 = n-1 \quad (4.13)$$

Ngược lại, nếu n không chia hết cho k , tức là $\gcd(n, k) = 1$, ta sử dụng tính chất quan trọng của phức số $e^{i\theta}$:

$$e^{i\theta} + e^{i(\theta+\alpha)} + e^{i(\theta+2\alpha)} + \dots + e^{i(\theta+(n-1)\alpha)} = \frac{e^{i\left(\theta + \frac{(n-1)\alpha}{2}\right)} \cdot \sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Ở đây, lấy $\theta = 0$ và $\alpha = \frac{2\pi k}{n}$, ta có:

$$1 + e^{-i2\pi k/n} + e^{-i4\pi k/n} + \dots + e^{-i2\pi(n-1)k/n} = \frac{e^{-i\pi k} \cdot \sin(\pi k)}{\sin(\pi k/n)}$$

Với $\sin(\pi k) = 0$ khi n không chia hết cho k , nên ta suy ra:

$$\sum_{j=1}^{n-1} e^{-\frac{i2\pi \cdot k \cdot j}{n}} = e^{-i2\pi k/n} + e^{-i4\pi k/n} + \dots + e^{-i2\pi(n-1)k/n} = 0 - 1 = -1 \quad (4.14)$$

Vậy nên, từ (4.13) và (4.14) ta có thể viết lại kết quả như sau:

$$\sum_{j=1}^{n-1} e^{-i2\pi k j/n} = \begin{cases} n-1 & \text{nếu } n|k \\ -1 & \text{ngược lại} \end{cases}$$

Đây là điều phải chứng minh! $\square$

Theorem 4.3.8

Xét $\varepsilon = e^{2i\pi/p}$ với p là một số nguyên tố. Khi đó:

$$\sum_{j=0}^{p-1} \varepsilon^{k \cdot j} = \begin{cases} p & \text{nếu } p|k \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

Chứng minh. Đây là hệ quả trực tiếp từ định lý 4.3.7 □

§4.3.2 Hàm sinh đa biến trong các đề thi Olympic

Bài toán 4.3.9 (Chọn đội tuyển PTNK 2009) — Có bao nhiêu số có n chữ số, mà các chữ số thuộc tập $\{2, 3, 7, 9\}$ và số đó chia hết cho 3?

Chứng minh. Ta có một số chia hết cho 3 khi và chỉ khi tổng các chữ số của nó chia hết cho 3. Như vậy yêu cầu bài toán tương đương với việc tìm số các số có n chữ số mà tổng các chữ số của nó chia hết cho 3.

Ta nhận thấy mỗi chữ số của những số đang tìm này nhận giá trị thuộc tập $\{2, 3, 7, 9\}$. Do đó hàm sinh cho mỗi chữ số sẽ là:

$$x^2 + x^3 + x^7 + x^9$$

Xét hàm sinh như sau:

$$F(x) = (x^2 + x^3 + x^7 + x^9)^n = f_0 + f_1 \cdot x + f_2 \cdot x^2 + \dots + f_{9n} \cdot x^{9n} \quad (4.15)$$

Trong đó f_k là số các số có n chữ số từ tập $\{2, 3, 7, 9\}$ mà có tổng các chữ số là k . Như vậy số các số thỏa là tổng sau:

$$A = \sum_{i=0}^{3n} f_{3i} = f_0 + f_3 + f_6 + \dots + f_{9n} \quad (4.16)$$

Nhận xét 4.3.10. Đến đây ta có thể áp dụng **định lý 4.3.4** để giải nhanh ra kết quả. Tuy nhiên ở phần trình bày này ta sẽ coi như chưa biết định lý trên và trình bày các bước tuần tự.

Xét $\varepsilon = e^{2i\pi/3}$ là **căn nguyên thủy bậc ba của đơn vị**, tức là ε là nghiệm của phương trình $x^3 = 1$.

Từ đây ta có $\varepsilon \neq 1$ và $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = \frac{1 - \varepsilon^3}{1 - \varepsilon} = \frac{0}{1 - \varepsilon} = 0$. Đây chính là được suy ra từ

định lý 4.3.8.

Khi đó ta tính được

$$\begin{aligned} F(1) &= f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \dots \\ F(\varepsilon) &= f_0 + f_1 \cdot \varepsilon + f_2 \cdot \varepsilon^2 + f_3 + f_4 \cdot \varepsilon + f_5 \cdot \varepsilon^2 + \dots \\ F(\varepsilon^2) &= f_0 + f_1 \cdot \varepsilon^2 + f_2 \cdot \varepsilon^4 + f_3 + f_4 \cdot \varepsilon^2 + f_5 \cdot \varepsilon^4 + \dots \\ &= f_0 + f_1 \cdot \varepsilon^2 + f_2 \cdot \varepsilon + f_3 + f_4 \cdot \varepsilon^2 + f_5 \cdot \varepsilon + \dots \end{aligned}$$

Cộng về theo về, ta suy ra:

$$\begin{aligned} F(1) + F(\varepsilon) + F(\varepsilon^2) &= 3 \cdot f_0 + (1 + \varepsilon + \varepsilon^2) \cdot f_1 + (1 + \varepsilon + \varepsilon^2) \cdot f_2 + 3 \cdot f_3 + \dots \\ &= 3 \cdot (f_0 + f_3 + f_6 + \dots) = 3 \cdot A \end{aligned}$$

Vậy ta có các số có n chữ số, chia hết cho 3 mà các chữ số thuộc tập $\{2, 3, 7, 9\}$ là:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{3} \cdot [F(1) + F(\varepsilon) + F(\varepsilon^2)] \\ &= \frac{1}{3} \cdot [(1 + 1 + 1 + 1)^n + (\varepsilon^2 + 1 + \varepsilon + 1)^n + (\varepsilon + 1 + \varepsilon^2 + 1)^n] \\ &= \frac{1}{3} \cdot (4^n + 2) \end{aligned}$$

□

Bài toán 4.3.11 — Tìm số các tập con của tập $S = \{1, 2, 3, \dots, 2024\}$ sao cho tổng các phần tử của nó chia hết cho 5.

Chứng minh. Xét hàm sinh như sau:

$$\begin{aligned} F(x) &= (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3) \cdots (1 + x^{2024}) \\ &= f_0 + f_1 \cdot x + f_2 \cdot x^2 + f_3 \cdot x^3 + \dots + f_{2024!} \cdot x^{2024!} \end{aligned}$$

Ta nhận thấy rằng hệ số của x^k trong khai triển trên chính là số tập con của S mà tổng các phần tử bằng k . Như vậy yêu cầu bài toán tương đương với việc tìm tổng tất cả các hệ số của số hạng có dạng $x^{5 \cdot k}$ trong khai triển của $F(x)$ như dưới đây:

$$A = \sum_{i=0}^{2024!/5} f_{5i} = f_0 + f_5 + f_{10} + \dots \quad (4.17)$$

Xét $\varepsilon = e^{2i\pi/5}$ là **căn nguyên thủy bậc 5 của đơn vị**. Điều này có nghĩa là ε là nghiệm khác 1 của phương trình $x^5 = 1$ và theo tính chất cơ bản của **căn nguyên thủy của đơn vị**, ta cũng có: $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 = 0$

Ta xét tích sau:

$$\begin{aligned} S &= (1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon^3)(1 + \varepsilon^4)(1 + 1) \\ &= (1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + 2 \cdot \varepsilon^3 + 2 \cdot \varepsilon^4 + 2 \cdot \varepsilon^5 + 2 \cdot \varepsilon^6 + 2 \cdot \varepsilon^7 + \varepsilon^8 + \varepsilon^9 + \varepsilon^{10}) \cdot 2 \\ &= (4 + 3 \cdot \varepsilon + 3 \cdot \varepsilon^2 + 3 \cdot \varepsilon^3 + 3 \cdot \varepsilon^4) \cdot 2 \\ &= [1 + 3(1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4)] \cdot 2 \\ &= 1 \cdot 2 = 2 \end{aligned}$$

Theo **định lý 4.3.4**, tổng các hệ số ta cần tìm, nói cách khác là A , có thể được viết lại như sau:

$$A = \frac{1}{5} \cdot [F(1) + F(\varepsilon) + F(\varepsilon^2) + F(\varepsilon^3) + F(\varepsilon^4)] \quad (4.18)$$

Ta tiến hành tính các $F(\varepsilon^i)_{i=0}^4$ như dưới:

$$\begin{aligned}
 F(1) &= \underbrace{(1+1)(1+1)(1+1) \cdots (1+1)}_{2024 \text{ lần}} = 2^{2024} \\
 F(\varepsilon) &= \underbrace{[(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^3)(1+\varepsilon^4)(1+\varepsilon^5)] \cdots (1+\varepsilon^{2021})(1+\varepsilon^{2022})(1+\varepsilon^{2023})(1+\varepsilon^{2024})}_{\left\lfloor \frac{2024}{5} \right\rfloor = 404 \text{ lần}} \\
 &= [(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^3)(1+\varepsilon^4)(1+1)]^{404} \cdot [(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^3)(1+\varepsilon^4)] \\
 &= S^{404} \cdot \frac{S}{2} = \frac{2^{405}}{2} = 2^{404}
 \end{aligned}$$

Bằng thao tác tương tự khi tính $F(\varepsilon)$, ta cũng tính được

$$F(\varepsilon^2) = F(\varepsilon^3) = F(\varepsilon^4) = F(\varepsilon) = 2^{404}$$

Thay các $F(\varepsilon^i)_{i=0}^4$ vào (4.18), ta tính được tổng:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{5} \cdot [F(1) + F(\varepsilon) + F(\varepsilon^2) + F(\varepsilon^3) + F(\varepsilon^4)] \\
 &= \frac{1}{5} \cdot (2^{2024} + 4 \cdot 2^{404}) \\
 &= \frac{1}{5} \cdot (2^{2024} + 2^{406})
 \end{aligned}$$

Vậy số các tập con của tập $S = \{1, 2, 3, \dots, 2024\}$ sao cho tổng các phần tử của nó chia hết cho 5 là $\frac{1}{5} \cdot (2^{2024} + 2^{406})$ □

III

Một số chủ đề hình học phẳng

5 Phép nghịch đảo trong bài toán chứng minh đồng quy

§5.1 Lý thuyết cơ bản về phép nghịch đảo

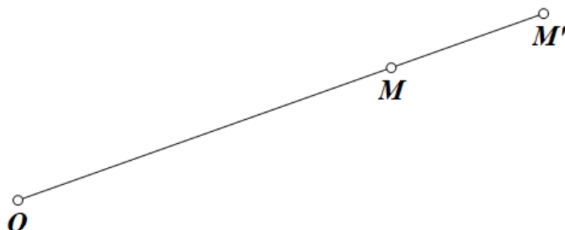
§5.1.1 Định nghĩa

Phép nghịch đảo là một trong những phép biến hình quan trọng trong hình học phẳng. Đây là một phép biến hình rất mạnh, giúp cho bài toán trở nên đơn giản hơn, lời giải xúc tích hơn. Cũng phải nói thêm, đây là một công cụ mạnh trong việc giải một bài hình học phẳng cũng như trong sáng tạo bài mới.

Định nghĩa (Phép nghịch đảo)

Trong mặt phẳng cho một điểm O cố định và một số thực $k \neq 0$. Nếu ứng với mỗi điểm M của mặt phẳng khác với điểm O , ta tìm được điểm M' nằm trên đường thẳng OM sao cho $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$ thì phép biến hình biến M thành M' được gọi là **phép nghịch đảo cực O , phương tích k** .

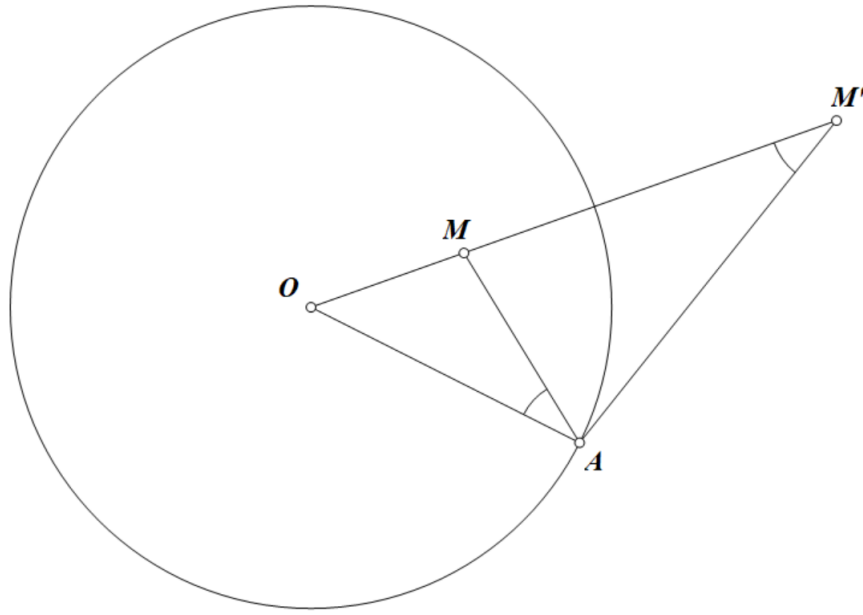
Khi đó điểm M' được gọi là ảnh của M qua phép nghịch đảo cực O , phương tích k . Ta ký hiệu $I_O^k : M \mapsto M'$ hay $I_O^k(M) = M'$. Ở đây I là viết tắt của **Inversion** _ thuật ngữ tiếng Anh của phép nghịch đảo.



Định nghĩa (Phép nghịch đảo qua đường tròn)

Cho đường tròn (O, R) , phép biến hình biến điểm M thuộc mặt phẳng thành M' thỏa mãn $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = R^2$ được gọi là phép nghịch đảo qua đường tròn (O, R) , tỷ số R^2 được gọi là phương tích của phép nghịch đảo, O được gọi là tâm nghịch đảo, đường tròn (O, R) được gọi là đường tròn nghịch đảo, R được gọi là bán kính nghịch đảo.

Nếu không quan tâm đến phương tích hay bán kính ta có thể ký hiệu phép nghịch đảo là $I_{(O,R)}$. Khi đó $M' = I_{(O,R)}(M)$. Nếu đã xác định rõ đường tròn ta chỉ cần ký hiệu là $M' = I_O(M)$.



Nhận xét 5.1.1. Ta thấy rằng phép nghịch đảo qua đường tròn có thể hình dung như việc ta lấy đối xứng điểm qua đường tròn đó. Khi đường tròn bán kính lớn bằng ∞ thì nó sẽ trùng với định nghĩa của phép đối xứng trục.

Nhận xét 5.1.2. Trong mặt phẳng Euclide, điểm duy nhất không lấy được nghịch đảo chính là tâm nghịch đảo, do đó phép nghịch đảo xác định trên mọi điểm của mặt phẳng Euclide trừ đi điểm O . Tuy nhiên khi bổ sung các điểm ∞ thì ảnh của tâm nghịch đảo chính là đường thẳng vô cực.

§5.1.2 Các tính chất nổi bật

Chúng ta đã được biết đến những phép biến hình bảo toàn khoảng cách, như phép dời hình, hay những phép biến hình bảo toàn tỷ số khoảng cách, như phép vị tự và đồng dạng. Trong bài viết này, thông qua việc tìm hiểu các tính chất, ta sẽ biết thêm một phép biến hình đặc biệt hơn bảo toàn góc giữa hai hình đó là phép nghịch đảo.

Proposition 5.1.3 (Tính đối hợp)

Đây là tính chất cơ bản nhất của phép nghịch đảo: tính chất đối hợp. Tức là nếu $I_O^k(M) = M'$ thì $I_O^k(M') = M$.

Nói cách khác, $(I_O^k)^2 = id$. Do vậy ta có thể ghi $I_O^k : M \leftrightarrow M'$.

Proposition 5.1.4 (Một số tính chất cơ bản khác của phép nghịch đảo)

- i) Nếu phép nghịch đảo $I_O^k : M \leftrightarrow M'$ thì O, M, M' thẳng hàng.
- ii) Phép nghịch đảo bảo toàn phương tích.
- iii) Phép nghịch đảo bảo toàn góc giữa hai đường thẳng, đường thẳng và đường tròn, hai đường tròn.

Proposition 5.1.5

Nếu $k > 0$, các điểm nằm trên đường tròn tâm O , bán kính $\sqrt{k}$ là các **điểm bất động** qua I_O^k . Ta gọi $(O, \sqrt{k})$ là **đường tròn nghịch đảo**, $\sqrt{k}$ là **bán kính nghịch đảo**.

Tính chất này còn có thể phát biểu theo cách khác như sau: Qua phép nghịch đảo I_O^k , tập hợp các điểm bất động là đường tròn tâm O , bán kính $\sqrt{k}$.

Chứng minh. Trước tiên ta sẽ xét **chiều thuận** như sau:

Xét 1 điểm M bất kỳ trên đường tròn $(O, \sqrt{k})$, ta có $OM = \sqrt{k}$. Khi đó:

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM} = \sqrt{k} \cdot \sqrt{k} = k \Rightarrow I_O^k(M) = M$$

Nói cách khác, điểm bất kỳ thuộc đường tròn $(O, \sqrt{k})$ thì đều thuộc tập điểm bất động qua phép nghịch đảo I_O^k . Chiều thuận được chứng minh!

Ta xét tiếp **chiều đảo** của tính chất:

Xét điểm M' thuộc tập điểm bất động qua phép nghịch đảo I_O^k . Điều này có nghĩa là M' thỏa:

$$I_O^k(M') = M' \Rightarrow \overline{OM'} \cdot \overline{OM'} = k \Rightarrow OM'^2 = (\overline{OM'})^2 = k \Rightarrow OM' = \sqrt{k}$$

Vậy ta suy ra: $M' \in (O, \sqrt{k})$. Chiều đảo được chứng minh!

□

Proposition 5.1.6

Nếu phép nghịch đảo $I_O^k : M \leftrightarrow M'; N \leftrightarrow N'$ và O, M, N không thẳng hàng thì bốn điểm M, N, M', N' đồng viên. Khi đó ta cũng có tỉ số:

$$M'N' = |k| \frac{MN}{OM \cdot ON}$$

Lưu ý tỉ số này vẫn đúng với trường hợp O, M, N thẳng hàng.

Chứng minh. Ta sẽ xét 2 trường hợp khi O, M, N thẳng hàng và ngược lại.

Trường hợp 1. Với O, M, N thẳng hàng:

Theo giả thiết ta có $I_O^k : M \leftrightarrow M'; N \leftrightarrow N'$ nên suy ra:

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k = \overline{ON} \cdot \overline{ON'} \quad (5.1)$$

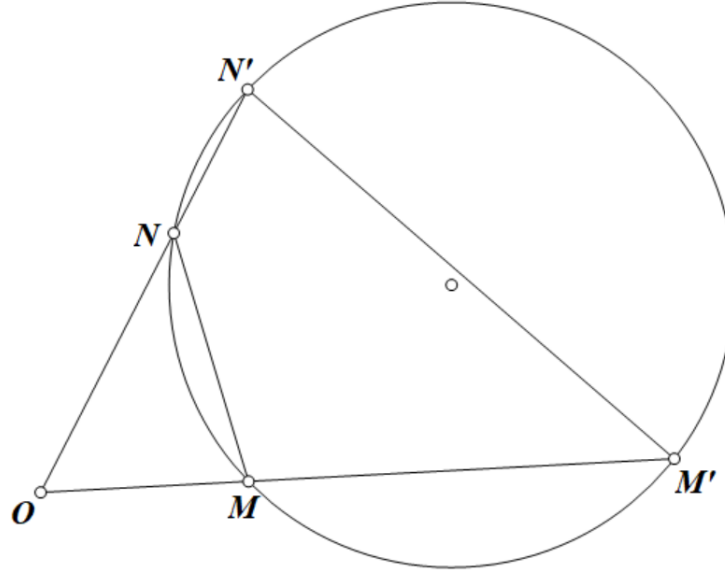
Ta sẽ áp dụng đẳng thức ở (5.1) để tính $\overline{M'N'}$ như sau:

$$\begin{aligned} \overline{M'N'} &= \overline{ON'} - \overline{OM'} = \frac{k}{\overline{ON}} - \frac{k}{\overline{OM}} \\ &= k \cdot \left(\frac{1}{\overline{ON}} - \frac{1}{\overline{OM}} \right) = k \frac{\overline{OM} - \overline{ON}}{\overline{OM} \cdot \overline{ON}} \\ &= k \frac{\overline{MN}}{\overline{OM} \cdot \overline{ON}} \end{aligned}$$

Vậy $M'N' = |k| \frac{MN}{\overline{OM} \cdot \overline{ON}}$. Đây là điều phải chứng minh!

Trường hợp 2. Với O, M, N không thẳng hàng:

Từ giả thiết, ta vẫn tính được đẳng thức ở (5.1). Nên theo tính chất của phương tích, M, N, M', N' đồng viên.



Mặt khác, $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \overline{ON} \cdot \overline{ON'} \Rightarrow \frac{\overline{OM}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{OM'}}{\overline{ON'}}$ nên $\triangle OMN \sim \triangle ON'M'$.

Từ đây ta suy ra:

$$\begin{aligned} \frac{M'N'}{MN} &= \frac{OM'}{ON} = \frac{ON'}{OM} = \sqrt{\frac{OM'}{ON}} \cdot \sqrt{\frac{ON'}{OM}} \\ &= \sqrt{\frac{OM'}{ON} \cdot \frac{ON'}{OM}} = \sqrt{\frac{OM \cdot OM'}{OM \cdot ON} \cdot \frac{ON \cdot ON'}{ON \cdot OM}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{k}{OM \cdot ON} \right)^2} = \frac{|k|}{OM \cdot ON} \end{aligned}$$

Điều này tương đương với: $M'N' = |k| \frac{MN}{\overline{OM} \cdot \overline{ON}}$. Đây là điều phải chứng minh! $\square$

Proposition 5.1.7

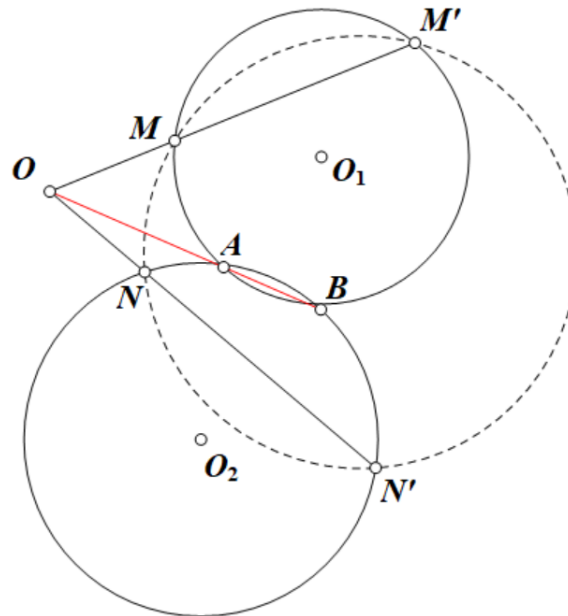
Cho đường tròn (O, R) và một điểm M trong mặt phẳng. Gọi M' là ảnh của M qua phép nghịch đảo qua đường tròn (O, R) , hay: $M' = I_{(O, R)}(M)$, và ω là đường tròn bất kỳ đi qua M và M' . Khi đó ω trực giao với (O, R) .

Chứng minh. Tính chất này có thể dễ dàng chứng minh bằng biến đổi góc. □

Hệ quả 5.1.8 — Cho đường tròn (O, R) . Giả sử có 2 đường tròn (O_1) và (O_2) phân biệt trực giao với (O) , đồng thời $(O_1) \cap (O_2) = \{A, B\}$. Khi đó A và B là ảnh của nhau qua phép nghịch đảo qua đường tròn (O, R) .

Chứng minh. Đây là một hệ quả của tính chất 5.1.7, ta sẽ chứng minh như sau

Gọi cát tuyến qua O giao (O_1) tại M và M' , cát tuyến qua O giao (O_2) tại N và N' . Từ tính chất 5.1.7, ta suy ra $M' = I_{(O, R)}(M)$ và $N' = I_{(O, R)}(N)$



Từ tính chất 5.1.6, ta lại có M, N, M', N' đồng viên, giả sử là cùng thuộc đường tròn ω . Khi đó áp dụng định lý tâm đẳng phương với 3 đường tròn (O_1) , (O_2) và ω thì ta được $\overline{OA}, \overline{OB}$.

Vậy tồn tại một cát tuyến qua O cắt lại (O_1) (và cả (O_2)) tại A và B . Áp dụng tính chất 5.1.7 một lần nữa, ta suy ra A và B là ảnh của nhau qua phép nghịch đảo qua đường tròn (O, R) . Đây là điều phải chứng minh! □

Hệ quả 5.1.9 — Gọi ω là đường tròn bất kỳ trực giao với đường tròn nghịch đảo (O, R) thì ω bất biến qua phép nghịch đảo qua đường tròn (O) . Nói cách khác thì $\omega = I_{(O, R)}(\omega)$.

Chứng minh. Đây cũng là một hệ quả của tính chất 5.1.7. Mời bạn đọc tự chứng minh □

Proposition 5.1.10

Tích của 2 phép nghịch đảo cùng tâm O , phương tích lần lượt là k và k' là phép vị tự tâm O tỉ số $\frac{k'}{k}$

Chứng minh. Xét phép nghịch đảo tâm O , phương tích k biến M thành M' và phép nghịch đảo tâm O , phương tích k' biến M' thành M'' . Ta có:

$$\begin{cases} I_O^k : M \leftrightarrow M' \\ I_O^{k'} : M' \leftrightarrow M'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k \\ \overline{OM'} \cdot \overline{OM''} = k' \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM''} = \frac{k'}{k} \overrightarrow{OM}$$

Từ đây suy ra M'' là ảnh của M qua phép vị tự tâm O tỉ số $\lambda = \frac{k'}{k}$. Đây là điều phải chứng minh! □

Hệ quả 5.1.11 — Ảnh của một hình qua phép nghịch đảo không phụ thuộc phương tích k mà chỉ phụ thuộc cực của phép nghịch đảo đó.

§5.1.3 Các định lý về ảnh qua phép nghịch đảo

Để ứng dụng bất kỳ phép biến hình nào vào giải các bài toán hình học thì quan trọng nhất là ta phải biết được ảnh của các hình quen thuộc qua phép biến đổi đó. Ở phần này bạn đọc sẽ được giới thiệu những định lý quan trọng cho chúng ta cái nhìn bao quát về **ảnh của một hình qua phép nghịch đảo**. Hai hình thông dụng nhất chúng ta tìm hiểu là đường thẳng và đường tròn. Trong phép nghịch đảo, điểm đặc biệt nhất là tâm nghịch đảo, nên chúng ta lần lượt xét vị trí tương đối của các hình với tâm nghịch đảo.

Theorem 5.1.12

Qua phép nghịch đảo, ảnh của đường thẳng đi qua tâm nghịch đảo là chính nó.

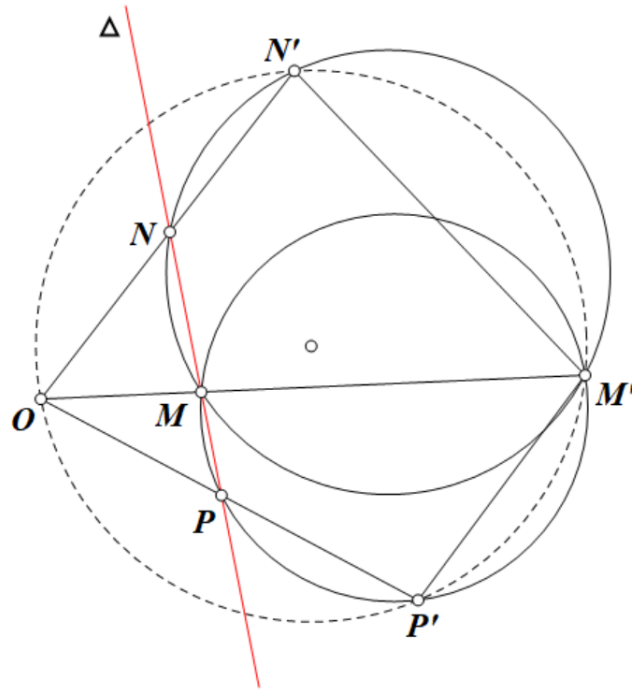
Chứng minh. Xét tâm nghịch đảo là O và đường thẳng d bất kỳ trong mặt phẳng. Khi d đi qua O thì định lý trên hiển nhiên đúng vì với mỗi điểm thuộc d thì sẽ biến thành một điểm khác thuộc d . □

Theorem 5.1.13

Qua phép nghịch đảo, ảnh của đường thẳng không đi qua tâm nghịch đảo là 1 đường tròn đi qua tâm nghịch đảo.

Chứng minh. Ta có nhiều cách để tiếp cận chứng minh định lý này. Dưới đây là 2 cách như vậy:

Cách 1. Xét điểm O và đường thẳng Δ bất kỳ trong mặt phẳng. Lấy tiếp 3 điểm bất kỳ trên Δ , gọi là M , N và P .



Xét phép nghịch đảo cực O , phương tích k là $I_O^k : M \leftrightarrow M', N \leftrightarrow N', P \leftrightarrow P'$. Từ đó ta có $I_O^k : \Delta \leftrightarrow (M'N'P')$

Theo tính chất 5.1.6 thì ta sẽ có các tứ giác $MNN'M'$ và $MPP'M'$ nội tiếp. khi đó:

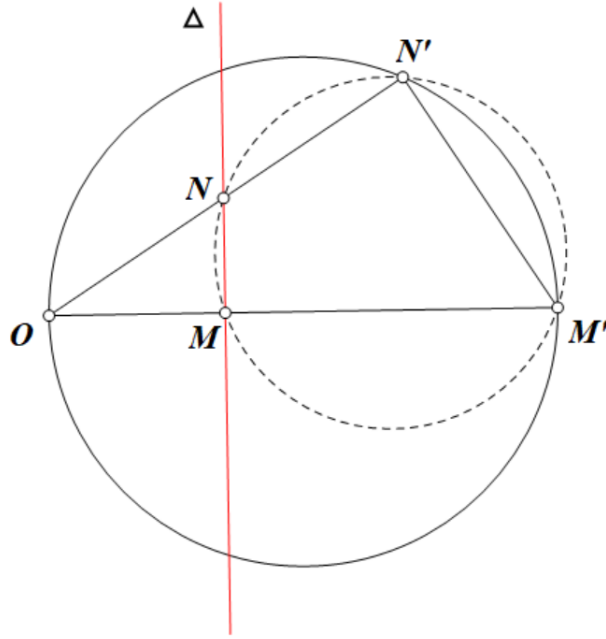
$$\begin{aligned}\angle N'M'P' &= \angle N'M'M + \angle MM'P' = \angle ONM + \angle OPM \\ &= 180^\circ - \angle NOP = 180^\circ - \angle N'OP'\end{aligned}$$

Vậy ta suy ra $O \in (M'N'P')$. Phép nghịch đảo cực O , phương tích k biến đường thẳng Δ thành đường tròn $(M'N'P')$ đi qua O là tâm nghịch đảo. Đây là điều phải chứng minh!

Cách 2. Vẫn xét điểm O và đường thẳng Δ cố định trong mặt phẳng. Ta lấy hình chiếu của O lên Δ là M và lấy thêm một điểm N di động trên Δ .

Xét phép nghịch đảo cực O , phương tích k là $I_O^k : M \leftrightarrow M', N \leftrightarrow N'$. Vì O và đường thẳng Δ cố định nên M cố định. Điều này kéo theo M' cũng cố định. Theo tính chất 5.1.6 thì ta có tứ giác $MNN'M'$ nội tiếp, từ đó suy ra:

$$\angle ON'M' = \angle OMN = 90^\circ$$



Vậy khi N thay đổi trên đường thẳng Δ , N' sẽ di chuyển trên đường tròn đường kính OM' cố định. Đây là điều phải chứng minh!

□

Theorem 5.1.14

Qua phép nghịch đảo, đường tròn đi qua tâm nghịch đảo biến thành đường thẳng không đi qua tâm nghịch đảo.

Chứng minh. Định lý này là hệ quả của định lý 5.1.13 và tính chất đối hợp của phép nghịch đảo. □

Theorem 5.1.15

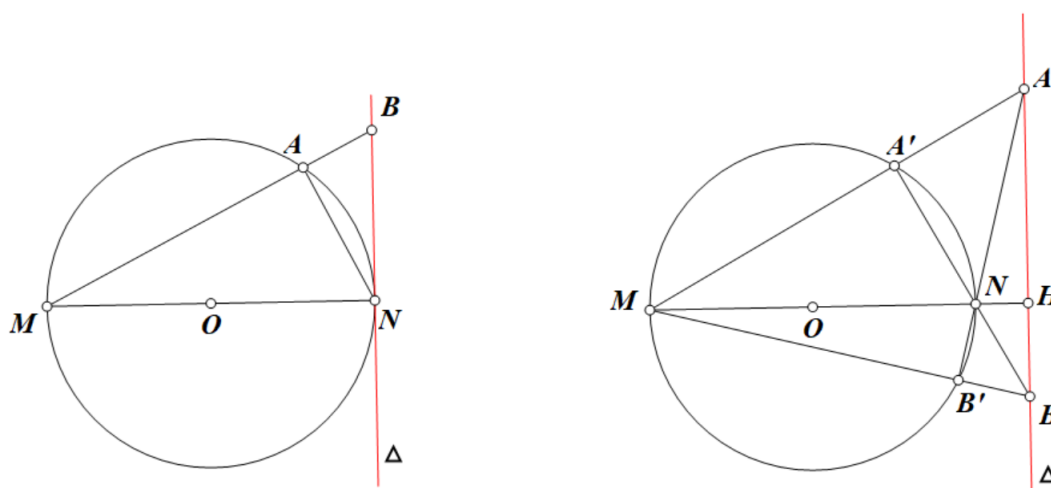
Qua phép nghịch đảo, đường tròn không đi qua tâm nghịch đảo biến thành đường tròn khác cũng không đi qua tâm nghịch đảo.

Chứng minh. Định lý này sẽ được chứng minh dựa trên cơ sở của tính chất 5.1.10

Xét điểm O và một đường tròn tâm I bất kỳ không đi qua O trên mặt phẳng. Từ O kẻ một cát tuyến đến (I) , giao tại 2 điểm M và N .

Xét phép nghịch đảo cực O , phương tích k là $I_O^k : M \leftrightarrow M', N \leftrightarrow N'$ và đặt $p = \mathcal{P}_{O/(I)}$ là phương tích từ O đến (I) . Khi đó ta có:

$$\begin{cases} \overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k \\ \overline{ON} \cdot \overline{ON'} = p \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\overline{OM'}}{\overline{ON}} = \frac{k}{p} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = \frac{k}{p} \overrightarrow{ON}$$



Trường hợp 2. Nếu Δ không tiếp xúc với (O) . Kẻ đường kính MN của (O) sao cho $MN \perp \Delta$ và gọi hình chiếu của MN lên Δ là H .

Xét đường thẳng bất kỳ đi qua M cắt lại (O) tại A' và cắt Δ tại A . AN cắt lại (O) tại B' , MB' giao Δ tại B . Dễ dàng chứng minh được N là trực tâm của $\triangle AMB$, đồng nghĩa với việc M cũng là trực tâm của $\triangle ANB$.

Khi đó tồn tại phép nghịch đảo cực M phương tích $k = MN \cdot MH$ và phép nghịch đảo cực N phương tích $k' = NM \cdot NH$ biến $(O) \leftrightarrow \Delta$.

□

§5.2 Chùm đường tròn và phép nghịch đảo

§5.2.1 Cơ sở lý thuyết

Chùm đường tròn là một chủ đề được khai thác nhiều trong các bài toán hình học phẳng liên quan đến sự đồng trục hay đồng quy,... Trong khuôn khổ nội dung phép nghịch đảo, các bài toán về chùm đường tròn cũng chiếm một phần không nhỏ. Sau đây bạn đọc sẽ được giới thiệu một số nội dung lý thuyết cần nắm. Những nội dung cơ bản hoặc không liên quan đến phép nghịch đảo sẽ không được chứng minh.

Định nghĩa (Phương tích)

Cho đường tròn (O, R) và điểm M bất kì. **Phương tích** của M đối với đường tròn (O) được kí hiệu và định nghĩa là $\mathcal{P}_{M/(O)} = OM^2 - R^2$.

Nhận xét 5.2.1. Từ định nghĩa về phương tích, ta thấy M nằm trên, trong hay ngoài đường tròn (O) khi và chỉ khi $\mathcal{P}_{M/(O)}$ tương ứng nhận giá trị bằng, nhỏ hơn, hay lớn hơn 0. Ngoài ra, định nghĩa trên vẫn đúng khi đường tròn (O) có bán kính R bằng 0, lúc này ta gọi (O) là đường tròn điểm O và $\mathcal{P}_{M/(O)} = OM^2$.

Bạn đọc cũng nên coi lại lý thuyết về khai triển của phương tích theo cát tuyến, theo tiếp tuyến và theo tam giác.

Định nghĩa (Trục đẳng phương)

Cho hai đường tròn không đồng tâm, tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn đó là một đường thẳng vuông góc với đường nối tâm của hai đường tròn. Đường thẳng này được gọi là **trục đẳng phương** của hai đường tròn đã cho.

Định nghĩa (Chùm đường tròn)

Tập hợp những đường tròn có chung một trục đẳng phương gọi là chùm đường tròn. Có ba loại chùm đường tròn là chùm Elliptic, Parabolic và Hyperbolic:

- **Chùm Elliptic:** Nếu trục đẳng phương của chùm đường tròn cắt một đường tròn của chùm tại hai điểm A và B thì mọi đường tròn của chùm đi qua hai điểm A và B . Chùm đó được gọi là chùm đường tròn Elliptic.
- **Chùm Parabolic:** Nếu trục đẳng phương của chùm đường tròn tiếp xúc với một đường tròn của chùm tại A thì mọi đường tròn của chùm đều tiếp xúc với nhau tại A . Chùm đó được gọi là chùm đường tròn Parabolic.
- **Chùm Hypebolic:** Nếu trục đẳng phương của chùm đường tròn không cắt một đường tròn của chùm thì mọi đường tròn của chùm đều không giao nhau. Chùm đó được gọi là chùm đường tròn Hypebolic.

Nhận xét 5.2.2. Từ định nghĩa của chùm đường tròn và các loại chùm, ta nhận thấy một chùm đường tròn hoàn toàn có thể được xác định nếu biết một đường tròn của chùm và trục đẳng phương của chùm hoặc biết hai đường tròn của chùm.

Theorem 5.2.3 (Định lý về chùm đường tròn)

Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) . Với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ta có tập hợp các đường tròn của chùm chứa (O_1) và (O_2) là:

$$(\Gamma) = \{M | \alpha \cdot \mathcal{P}_{M/(O_1)} + \beta \cdot \mathcal{P}_{M/(O_2)} = 0\}$$

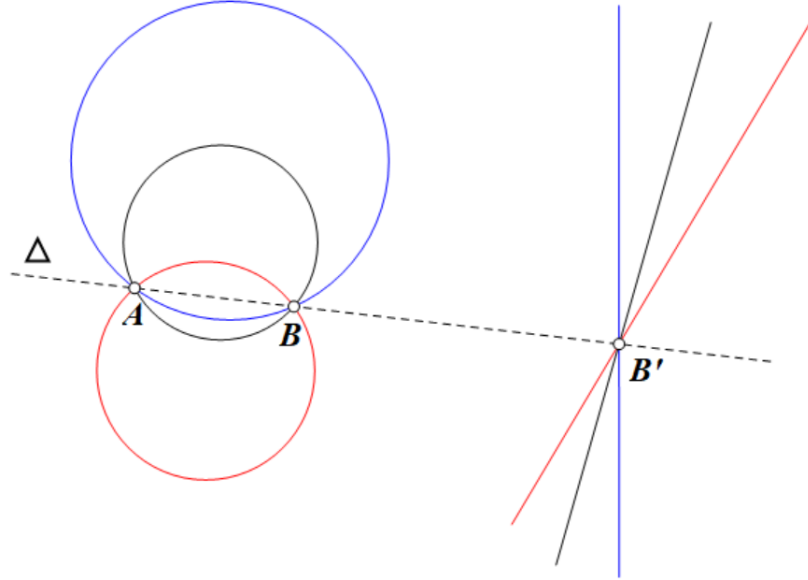
§5.2.2 Chùm đường tròn qua phép nghịch đảo**Theorem 5.2.4 (Ảnh của chùm đường tròn qua phép nghịch đảo)**

Xét một chùm đường tròn $(\Gamma) = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ trên mặt phẳng. Khi đó:

- Nếu (Γ) là một chùm đường tròn **elliptic** cùng đi qua hai điểm A và B . Qua phép nghịch đảo cực A , phương tích k , ảnh của chùm (Γ) sẽ là chùm đường thẳng đồng quy tại $B' = I_A^k(B)$.
- Nếu (Γ) là một chùm đường tròn **parabolic** tiếp xúc với trục đẳng phương Δ tại A . Qua phép nghịch đảo cực A , phương tích k , ảnh của chùm (Γ) sẽ là chùm đường thẳng đôi một song song và song song với Δ .

Chứng minh. Xét chùm đường tròn $(\Gamma) = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ trên mặt phẳng. Ta lần lượt chứng minh với các trường hợp sau:

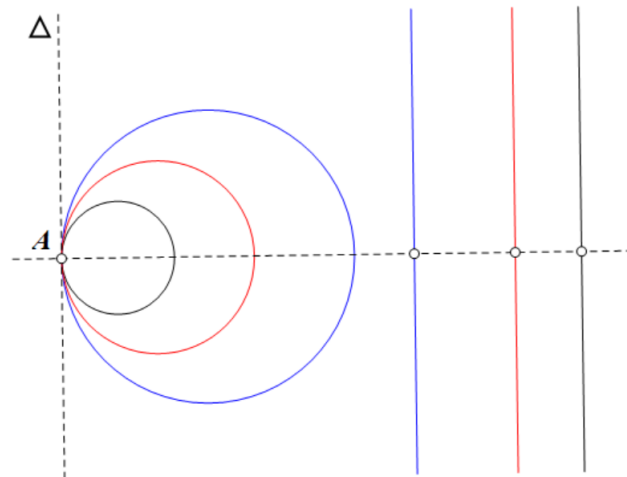
Trường hợp 1. Nếu (Γ) là một chùm đường tròn **elliptic**. Gọi Δ là trục đẳng phương của (Γ) , $A, B \in \Delta$ là hai điểm chung của chùm.



Xét phép nghịch đảo cực A , phương tích k bất kỳ biến $B \leftrightarrow B'$. Theo định lý 5.1.14, ta có mỗi đường tròn ω_i trong chùm (Γ) qua I_A^k sẽ biến thành một đường thẳng d_i không đi qua tâm nghịch đảo A .

Mà để ý (Γ) có điểm chung còn lại là B nên ảnh của (Γ) là chùm đường thẳng $d_1, d_2, \dots, d_n$ sẽ cùng đi qua một điểm là ảnh của B qua I_A^k , chính là B' . Đến đây ta có điều phải chứng minh!

Trường hợp 2. Nếu (Γ) là một chùm đường tròn **parabolic** cùng tiếp xúc với trục đẳng phương, gọi là Δ , tại A .



IV

Active work: GGP

V

Active work: Orbital

6 Orbital integral

§6.1 Background

Let F be a finite extension of $\mathbb{Q}_p$ for $p > 2$ and let E/F be an unramified quadratic field extension. Denote by ϖ a uniformizer of $\mathcal{O}_F$, such that $\bar{\varpi} = \varpi$, and let v be the associated valuation. Let η be the quadratic character attached to E/F by class field theory, so that $\eta(x) = -1^{v(x)}$.

§6.1.1 Symmetric space

We define the symmetric space

$$S_3(F) := \{s \in \mathrm{GL}_3(E) \mid s\bar{s} = \mathrm{id}\}.$$

We also pay particular attention to the subspace which have $\mathcal{O}_E$ entries:

$$K_S := S_3(F) \cap \mathrm{GL}_3(\mathcal{O}_E).$$

Bổ đề 1 (Cartan decomposition)

For each integer $m \geq 0$ let

$$K_{S,m} := K_S \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varpi^m \\ 0 & 1 & 0 \\ \varpi^{-m} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Then we have a decomposition

$$S_3(F) = \coprod_{m \geq 0} K_{S,m}.$$

For $r \geq 0$, define

$$\Omega_r := S_3(F) \cap \varpi^{-m} \mathrm{GL}_3(\mathcal{O}_E).$$

We can re-parametrize the problem according to the following claim.

Mệnh đề 6.1.1 —

$$\Omega_r = K_{S,0} \sqcup K_{S,1} \sqcup \cdots \sqcup K_{S,r}.$$

If this claim is true (still need to check it), then an integral over each Ω_r lets us extract the integrals over $K_{S,m}$.

§6.1.2 Orbital integral

Define

$$H' := \left\{ \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \\ \bar{t}_2 & \bar{t}_1 \end{bmatrix} \right\} \cong \mathrm{GL}_2(F).$$

We embed H' into $\mathrm{GL}_3(F)$ by $h' \mapsto \begin{bmatrix} h' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, which allows H to act on $\mathrm{GL}_3(F)$ and hence $S_3(F)$.

Now we can define the orbital integral.

Định nghĩa 6.1.2. For brevity let $\eta(h') := \eta(\det h')$ for $h' \in H'$. For $\gamma \in S_3(F)$ and $s \in \mathbb{C}$, we define the orbital integral by

$$O(\gamma, s) := \int_{g \in H'} \mathbf{1}_{\Omega_r}(\bar{g}^{-1} \gamma g) \eta(g) |\det(g)|_F^{-s} g$$

where

$$g = \kappa \cdot \frac{t_1 t_2}{|t_1 \bar{t}_1 - t_2 \bar{t}_2|_F^2}$$

for the constant $\kappa := (1 - q^{-1})^{-1} (1 - q^{-2})^{-1}$.

Indeed, for $h' \in H$ and $\gamma \in S_3(F)$ we have $h' \gamma (\bar{h}')^{-1} \in S_3(F)$ and so the indicator function is filtering based on which part of the Cartan decomposition that $h' \gamma (\bar{h}')^{-1}$ falls in.

Evidently $O(\gamma, s)$ only depends on the H' -orbit of γ . So it makes sense to pick a canonical representative for the H' -orbit to compute the orbital integral in terms of. For so-called *regular* γ , the representatives

$$\gamma(a, b, d) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & -\bar{d} & 1 \\ c & 1 - d\bar{d} & d \end{bmatrix} \in S_3(F); \quad \text{where } c = -a\bar{b} + bd$$

over all $a \in E^1$, $b \in E$, $d \in E$ for which $(1 - d\bar{d})^2 - c\bar{c} \neq 0$, cover all the *regular* orbits, which are the ones we care about.

For $r = 0$, [?] computes $sO(\gamma, s)$ at $s = 0$ in terms of a, b, d . Our goal is to compute it for $r > 0$ too.

§6.2 Reparametrization in terms of valuations

§6.2.1 Computation of value in indicator function

We are integrating over $t_1 \in E$ and $t_2 \in E$. Regarding $g \in H'$ as an element of GL_3 as described before, we have

$$g = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & 0 \\ \bar{t}_2 & \bar{t}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

We therefore have

$$\bar{g}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{t_1}{t_1 t_1 - t_2 t_2} & \frac{-\bar{t}_2}{t_1 t_1 - t_2 t_2} & 0 \\ \frac{-t_2}{t_1 t_1 - t_2 t_2} & \frac{\bar{t}_1}{t_1 t_1 - t_2 t_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hence

$$\begin{aligned}
\bar{g}^{-1}\gamma g &= \begin{bmatrix} \frac{t_1}{t_1\bar{t}_1-t_2\bar{t}_2} & \frac{-\bar{t}_2}{t_1\bar{t}_1-t_2\bar{t}_2} & 0 \\ \frac{-t_2}{t_1\bar{t}_1-t_2\bar{t}_2} & \frac{\bar{t}_1}{t_1\bar{t}_1-t_2\bar{t}_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & -\bar{d} & 1 \\ c & 1-d\bar{d} & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & 0 \\ \bar{t}_2 & \bar{t}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{t_1}{t_1\bar{t}_1-t_2\bar{t}_2} & \frac{-\bar{t}_2}{t_1\bar{t}_1-t_2\bar{t}_2} & 0 \\ \frac{-t_2}{t_1\bar{t}_1-t_2\bar{t}_2} & \frac{\bar{t}_1}{t_1\bar{t}_1-t_2\bar{t}_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} at_1 & at_2 & 0 \\ bt_1 - \bar{d}\bar{t}_2 & bt_2 - \bar{d}\bar{t}_1 & 1 \\ ct_1 + (1-d\bar{d})\bar{t}_2 & ct_2 + (1-d\bar{d})\bar{t}_1 & d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{at_1^2 - bt_1\bar{t}_2 + d\bar{t}_2^2}{t_1\bar{t}_1 - t_2\bar{t}_2} & \frac{at_1t_2 - bt_2\bar{t}_2 + d\bar{t}_1\bar{t}_2}{t_1\bar{t}_1 - t_2\bar{t}_2} & \frac{-\bar{t}_2}{t_1\bar{t}_1 - t_2\bar{t}_2} \\ \frac{-at_1t_2 + bt_1\bar{t}_1 - d\bar{t}_1\bar{t}_2}{t_1\bar{t}_1 - t_2\bar{t}_2} & \frac{-at_2^2 + bt_2\bar{t}_2 - d\bar{t}_1^2}{t_1\bar{t}_1 - t_2\bar{t}_2} & \frac{\bar{t}_1}{t_1\bar{t}_1 - t_2\bar{t}_2} \\ ct_1 + (1-d\bar{d})\bar{t}_2 & ct_2 + (1-d\bar{d})\bar{t}_1 & d \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Let us define

$$t = t_2\bar{t}_1^{-1} \iff t_2 = t\bar{t}_1.$$

This lets us rewrite everything in terms of the ratio t and $t_1 \in E$:

$$\bar{g}^{-1}\gamma g = \begin{bmatrix} \frac{t_1^2(a - b\bar{t} + d\bar{t}^2)}{t_1\bar{t}_1(1 - t\bar{t})} & \frac{t_1\bar{t}_1(at - b\bar{t}\bar{t} + d\bar{t})}{t_1\bar{t}_1(1 - t\bar{t})} & \frac{t_1 \cdot (-\bar{t})}{t_1\bar{t}_1(1 - t\bar{t})} \\ \frac{t_1\bar{t}_1(-at + b - d\bar{t})}{t_1\bar{t}_1(1 - t\bar{t})} & \frac{\bar{t}_1^2(-at^2 + bt - d)}{t_1\bar{t}_1(1 - t\bar{t})} & \frac{-\bar{t}_1}{t_1\bar{t}_1(1 - t\bar{t})} \\ t_1(c + (1-d\bar{d})\bar{t}) & \bar{t}_1(ct + (1-d\bar{d})) & d \end{bmatrix}$$

This new parametrization is better because t_1 only plays the role of a scale factor on the outside, with “interesting” terms only involving t . To make this further explicit, we write

$$t_1 = \varpi^m \varepsilon$$

for $m \in \mathbb{Z}$ and $\varepsilon \in \mathcal{O}_E^\times$. Then we actually have

$$\begin{bmatrix} \bar{\varepsilon} & & \\ & \varepsilon & \\ & & 1 \end{bmatrix} \bar{g}^{-1}\gamma g \begin{bmatrix} \varepsilon^{-1} & & \\ & \bar{\varepsilon}^{-1} & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a - b\bar{t} + d\bar{t}^2}{1 - t\bar{t}} & \frac{at - b\bar{t}\bar{t} + d\bar{t}}{1 - t\bar{t}} & \frac{-\varpi^m \bar{t}}{1 - t\bar{t}} \\ \frac{-at + b - d\bar{t}}{1 - t\bar{t}} & \frac{-at^2 + bt - d}{1 - t\bar{t}} & \frac{-\varpi^m}{1 - t\bar{t}} \\ \frac{c + (1-d\bar{d})\bar{t}}{\varpi^m} & \frac{ct + (1-d\bar{d})}{\varpi^m} & d \end{bmatrix}$$

For brevity, we will let $\Gamma(\gamma, t, m)$ denote the right-hand matrix. The conjugation by $\begin{bmatrix} \varepsilon^{-1} & & \\ & \bar{\varepsilon}^{-1} & \\ & & 1 \end{bmatrix}$ has no effect on any of the Ω_r , so that we can simply use

$$\mathbf{1}_{\Omega_r}(\bar{g}^{-1}\gamma g) = \mathbf{1}_{\Omega_r}(\Gamma(\gamma, t, m))$$

in the work that follows. By abuse of notation, we abbreviate

$$\mathbf{1}(\gamma, t, m) := \mathbf{1}_{\Omega_r}(\Gamma(\gamma, t, m)).$$

§6.2.2 Reparametrizing the integral in terms of t and m

From now on, following [?] we always fix the notation

$$\begin{aligned} m &= m(t_1) := -v(t_1) \\ n &= n(t) := v(1 - t\bar{t}). \end{aligned}$$

We need to rewrite the integral, phrased originally via g , in terms of the parameters t (hence n), m , and γ . We start by observing that

$$\det g = t_1\bar{t}_1 - t_2\bar{t}_2 = t_1\bar{t}_1(1 - t\bar{t})$$

which means that

$$v(\det g) = -2m + n$$

ergo

$$\begin{aligned} |\det g|_F &= q^{-v(\det g)} = q^{2m-n} \\ \eta(g) &= (-1)^{v(\det g)} = (-1)^n. \end{aligned}$$

Meanwhile, from $t_2 = t\bar{t}_1$ we derive

$$t_2 = |t_1|_E t = q^{2m} t.$$

Bringing this all into the orbital integral gives

$$\begin{aligned} O(\gamma, s) &= \kappa \int_{t, t_1 \in E} \mathbf{1}(\gamma, t, m) (-1)^n (q^{2m-n})^{s-2} t_1 \cdot (q^{2m} t) \\ &= \kappa \int_{t, t_1 \in E} \mathbf{1}(\gamma, t, m) (-1)^n q^{s(2m-n)} \cdot q^{2n-2m} t t_1. \end{aligned}$$

§6.3 Setup

§6.3.1 Simplifying assumptions

For the purposes of [?], we will only care about the following case:

$$v((1 - d\bar{d})^2 - c\bar{c}) \equiv 1 \pmod{2}$$

We will also assume: $v(d) \geq -r$. This is fine because if this $v(d) < -r$ then the integral will always vanish (because the bottom-right entry of $\Gamma(\gamma, t, m)$ is no-good). Because of this, from (6.3) we then get

Hệ quả 6.3.1 — $v(b) \geq -r$.

§6.3.2 Notations

As we described earlier, our goal is to give an answer in terms of

$$a \in E^1, \quad b, d \in E, \quad r > 0.$$

To simplify the notation in what follows, it will be convenient to define several quantities that reappear frequently. From Section 6.3.1, we may define

$$\delta := v(1 - d\bar{d}) = v(c) \neq -\infty. \tag{6.1}$$

Following [?] we will also define

$$u := \frac{\bar{c}}{1 - d\bar{d}} \in \mathcal{O}_E^\times \quad (6.2)$$

so that $\nu(1 - u\bar{u}) \equiv 1 \pmod{2}$ and

$$b = -au - \bar{d}\bar{u}. \quad (6.3)$$

Note that this gives us the following repeatedly used identity

$$b^2 - 4a\bar{d} = (au - \bar{d}\bar{u})^2 - 4a\bar{d}(1 - u\bar{u}). \quad (6.4)$$

Finally, define

$$\ell := v(b^2 - 4a\bar{d}). \quad (6.5)$$

§6.4 Description of the nonzero regions

§6.4.1 The case where $n \leq 0$

Mệnh đề 6.4.1 — Whenever $n = 0$ (this requires $v(t) \geq 0$),

$$\mathbf{1}(\gamma, t, m) = \begin{cases} 1 & \text{if } -r \leq m \leq \delta + r \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Chứng minh. We have to consider the nine entries of $\Gamma(\gamma, t, m)$ in tandem.

The upper 2×2 matrix is always in $\omega^{-r}\mathcal{O}_E$, because $v(t) \geq 0$, $v(d) \geq -r$, $v(b) \geq -r$, and $v(a) = 0$ suffices.

In the right column, since $v(t) \geq 0$ and $n = 0$, the condition is simply $m \geq -r$.

In the bottom row, we need $v(c + (1 - d\bar{d})\bar{t}) - m \geq -r$ and $v(ct + (1 - d\bar{d})) - m \geq -r$. If $v(t) > 0$ this is equivalent to $m - r \leq \delta$. In the case where $v(t) = 0$ we instead use the observation that

$$[c + (1 - d\bar{d})\bar{t}] - \bar{t}[ct + (1 - d\bar{d})] = (1 - t\bar{t})c \quad (6.6)$$

which forces at least one of $ct + (1 - d\bar{d})$ and $c + (1 - d\bar{d})\bar{t}$ to have valuation δ . So the claim follows now. $\square$

Mệnh đề 6.4.2 — Suppose $n = -2k < 0$, equivalently, $v(t) = -k < 0$, for some k .

$$\mathbf{1}(\gamma, t, m) = \begin{cases} 1 & \text{if } -r \leq m + k \leq \delta + r \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Chứng minh. The proof is similar to the previous claim, but simpler.

Since $k > 0$, the fraction $\frac{t^2}{1-tt}$ has positive valuation, so the upper 2×2 of $\Gamma(\gamma, t, m)$ is always in $\varpi^{-r}\mathcal{O}_E$. Turning to the right column, the condition reads exactly $m + k \geq -r$. Finally, in the bottom row, from $v(t) > 0$ and $v(c) = \delta$ the condition is simply $-k + \delta - m \geq -r$. $\square$

§6.4.2 Setup for $n > 0$

In this situation we evaluate over $n > 0$ only. In this case t is automatically a unit.

Consider the upper 2×2 matrix of $\Gamma(\gamma, t, m)$. Using the identities

$$\begin{aligned} \frac{a - b\bar{t} + \bar{d}t^2}{1 - t\bar{t}} - \bar{t} \cdot \frac{at - bt\bar{t} + \bar{d}t}{1 - t\bar{t}} &= a - b\bar{t} \in \varpi^{-r}\mathcal{O}_E \\ \frac{a - b\bar{t} + \bar{d}t^2}{1 - t\bar{t}} + \bar{t} \cdot \frac{-at + b - \bar{d}t}{1 - t\bar{t}} &= a \in \varpi^{-r}\mathcal{O}_E \\ \frac{-at + b - \bar{d}t}{1 - t\bar{t}} - \bar{t} \cdot \frac{-at^2 + bt - \bar{d}}{1 - t\bar{t}} &= -a + b \in \varpi^{-r}\mathcal{O}_E. \end{aligned}$$

it follows that as soon as one entry is in $\varpi^{-r}\mathcal{O}_E$, they all are. Meanwhile, the requirements on the other entries amount to

$$m \geq n - r \quad (6.7)$$

$$v(c + (1 - d\bar{d})\bar{t}) \geq m - r \quad (6.8)$$

$$v(ct + (1 - d\bar{d})) \geq m - r \quad (6.9)$$

According to the earlier identity (6.6), if (6.8) is assumed true, then (6.9) is equivalent to

$$\delta + v(1 - t\bar{t}) \geq m - r.$$

Meanwhile, since $v(c + (1 - d\bar{d})\bar{t}) = v(\bar{c} + (1 - d\bar{d})t)$, (6.8) is itself equivalent to

$$v(t + u) + \delta \geq m - r$$

by reading the definition of (6.2).

Finally, we use a tricky substitution

$$(2at - b)^2 - (b^2 - 4a\bar{d}) = -4a(-at^2 + bt - \bar{d})$$

to rewrite $v(-at^2 + bt - \bar{d}) \geq n - r$ as $v((2at - b)^2 - (b^2 - 4a\bar{d})) \geq n - r$.

In summary:

Mệnh đề 6.4.3 — Assume t is such that $n = v(1 - t\bar{t}) > 0$. Then $\mathbf{1}(\gamma, t, m) = 1$ if and only if

$$n - r \leq m \leq n + \delta + r$$

and t lies in the set specified by

$$\begin{aligned} v((2at - b)^2 - (b^2 - 4a\bar{d})) &\geq n - r \\ v(t + u) &\geq m - \delta - r. \end{aligned}$$

§6.4.3 Volume lemma

The following lemma will be useful.

Bổ đề 2 ([?, Lemma 4.4])

Let $\xi \in \mathcal{O}_E^\times$, and integer λ , such that $1 \leq \lambda \leq n$, the volume of the set

$$\{x \in E \mid v(1 - x\bar{x}) = n, v(x - \xi) \geq \lambda\}$$

equals

$$\begin{cases} 0 & v(1 - \xi\bar{\xi}) < \lambda \\ q^{-(n+\lambda)}(1 - q^{-1}) & v(1 - \xi\bar{\xi}) \geq \lambda. \end{cases}$$

We will also need to intersect two disks. In an ultrametric space, this is easy to do:

Bổ đề 3 (No MasterCard logo in an ultrametric space)

Choose $\xi_1, \xi_2 \in E$ and $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$. Consider the two disks:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{x \in E \mid v(x - \xi_1) \geq \lambda_1\} \\ D_2 &= \{x \in E \mid v(x - \xi_2) \geq \lambda_2\}. \end{aligned}$$

Then, if $v(\xi_1 - \xi_2) \geq \lambda_2$, we have $D_1 \subseteq D_2$. If not, instead $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

Chứng minh. Because E is an ultrametric space and $(D_1) \leq (D_2)$, we either have $D_1 \subseteq D_2$ or $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. The latter condition checks which case we are in by testing if $\xi_1 \in D_2$, since $\xi_1 \in D_1$. $\square$

§6.4.4 The case where $n > 0$, and ℓ is odd

Considering $n > 0$ and $n - r \leq m \leq n + \delta + r$ as fixed, we compute the volume of the set of t for which $n = v(1 - t\bar{t})$ and $\mathbf{1}(\gamma, t, m) = 0$.

Supposing ℓ is odd, the condition

$$v((2at - b)^2 - (b^2 - 4a\bar{d})) \geq n - r$$

is equivalent to simultaneously the two conditions

$$v((2at - b)^2) \geq n - r \implies v\left(t - \frac{b}{2a}\right) \geq \left\lceil \frac{n - r}{2} \right\rceil \quad (6.10)$$

$$v(b^2 - 4a\bar{d}) \geq n - r \implies \ell \geq n - r. \quad (6.11)$$

We also had the requirement

$$v(t + u) \geq m - \delta - r. \quad (6.12)$$

Use Lemma 3 on (6.10) and (6.12), noting the distance between the two centers is exactly

$$v\left(u + \frac{b}{2a}\right) = v\left(\frac{au - \bar{d}\bar{u}}{2a}\right) = v(au - \bar{d}\bar{u}).$$

Considering that our disks have “radius” $\left\lceil \frac{n-r}{2} \right\rceil$ and $m - \delta - r$ respectively, we obtain two possible situations:

- If $m < \left\lceil \frac{n-r}{2} \right\rceil + \delta + r$ the nonempty condition reads

$$v(4 - b\bar{b}) \geq \left\lceil \frac{n-r}{2} \right\rceil \quad (6.13)$$

$$v(au - \bar{d}\bar{u}) \geq m - \delta - r. \quad (6.14)$$

- If $m \geq \left\lceil \frac{n-r}{2} \right\rceil + \delta + r$ the nonempty condition reads

$$v(1 - u\bar{u}) \geq m - \delta - r \quad (6.15)$$

$$v(au - \bar{d}\bar{u}) \geq \left\lceil \frac{n-r}{2} \right\rceil. \quad (6.16)$$

To proceed further, we need to prove a few properties. We list them in turn.

Fact 6.4.4. Whenever ℓ is odd, we must have

$$v(b) = v(d) = 0. \quad (6.17)$$

Proof of (6.17). If $v(d) \neq 0$, then $b = -au - \bar{d}\bar{u}$ is a unit, and hence so is $b^2 - 4a\bar{d}$, causing $\ell = 0$, contradiction. And if d is a unit, $\ell \neq 0$ means $v(b) = 0$ too. $\square$

Next, note that (6.4) together with (6.17) and the assumption ℓ was odd implies

$$\ell = v(1 - u\bar{u}) < 2v(au - \bar{d}\bar{u}). \quad (6.18)$$

This implies that:

Fact 6.4.5. (6.14) and (6.16) are redundant for odd ℓ , i.e. they are automatically true whenever $n > 0$ and $n - r \leq m \leq n + \delta + r$.

Chứng minh. Delete the ceilings. We have $\frac{n-r}{2} \leq \frac{\ell}{2} < v(au - \bar{d}\bar{u})$ in both cases. And in (6.13), we have $m - \delta - r \leq \frac{n-r}{2}$ anyway. $\square$

Finally, the equation $b(4 - b\bar{b}) = -4au(1 - d\bar{d}) - \bar{b}(b^2 - 4a\bar{d})$ together with (6.17) implies

$$v(4 - b\bar{b}) \geq \min(\ell, \delta) \text{ with equality if } \ell \neq \delta. \quad (6.19)$$

Putting all of this together, we find that the valid pairs (n, m) come in two cases.

First case The first case is

$$1 \leq n \leq \min(\ell, 2\delta) + r, \quad n - r \leq m \leq \left\lceil \frac{n-r}{2} \right\rceil + \delta + r - 1 \quad (6.20)$$

where each (m, n) gives a volume contribution of

$$q^{-n - \left\lceil \frac{n-r}{2} \right\rceil} \left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

Second case The second case is

$$1 \leq n \leq \ell + r, \quad \max\left(n - r, \left\lceil \frac{n-r}{2} \right\rceil + \delta + r\right) \leq m \leq \min(n, \ell) + \delta + r \quad (6.21)$$

where each (m, n) gives a volume contribution of

$$q^{-n - (m - \delta - r)} \left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

§6.4.5 The case where $n > 0$, ℓ is even, $v(b) = v(d) = 0$

As before we consider $n > 0$ and $n - r \leq m \leq n + \delta + r$ as fixed, and seek to compute the volume of the set of t for which $n = v(1 - t\bar{t})$ and $\mathbf{1}(\gamma, t, m) = 0$.

Suppose ℓ is even. Then the left-hand side of (6.4) is a square, which we denote τ^2 . In this case, we obtain

$$2v(\tau) = \ell = 2v(au - \bar{d}\bar{u}) > v(1 - u\bar{u}).$$

Then the condition that

$$v\left((2at - b)^2 - \underbrace{(b^2 - 4ad)}_{=\tau^2}\right) \geq n - r$$

falls into three disjoint parts:

- Both $v((2at - b)^2) \geq n - r$ and $\ell = v(\tau^2) \geq n - r$ hold, as in the ℓ odd case.
- We have $\ell = v(\tau^2) < n - r$ but

$$v(2at - b \mp \tau) \geq (n - r) - \ell/2 > 0, \quad v(2at - b \pm \tau) = \ell/2.$$

This is two parts, corresponding to the choice of $\pm$.

We analyze the second case since the first case is the same as before (as we have are assuming (6.17) in this section; it does not follow for ℓ even). The constraints on t become the two circles

$$v\left(t - \frac{b \pm \tau}{2a}\right) \geq n - \ell/2 - r \tag{6.22}$$

$$v(t + u) \geq m - \delta - r. \tag{6.23}$$

Note that

$$1 - \frac{b \pm \tau}{2a} \cdot \frac{\bar{b} \pm \bar{\tau}}{2\bar{a}} = \frac{4 - N(b \pm \tau)}{4}$$

The distance between the two circles has valuation

$$v\left(u + \frac{b \pm \tau}{2}\right) = v(au - \bar{d}\bar{u} \pm \tau).$$

Since $(au - \bar{d}\bar{u})^2 - \tau^2 = 4ad(1 - \bar{u})$, we agree now to fix the choice of the square root of τ such that

$$v(au - \bar{d}\bar{u} + \tau) = v(1 - u\bar{u}) - v(\tau) \quad \text{and} \quad v(au - \bar{d}\bar{u} - \tau) = v(\tau). \tag{6.24}$$

This lets us invoke [?, Lemma 4.7] to evaluate $v(4 - N(b \pm \tau))$.

In the $\frac{b \pm \tau}{2a}$ case, we get

- If $m < n - \frac{\ell}{2} + \delta$, the nonempty condition becomes

$$\begin{aligned} v(1 - u\bar{u}) + \delta - \ell &= v(4 - N(b + \tau)) \geq n - \frac{\ell}{2} - r \\ v(1 - u\bar{u}) - \ell/2 &= v(au - \bar{d}\bar{u} + \tau) \geq m - \delta - r. \end{aligned}$$

- If $m \geq n - \frac{\ell}{2} + \delta$, the nonempty condition becomes

$$\begin{aligned} v(1 - u\bar{u}) &\geq m - \delta - r \\ v(1 - u\bar{u}) - \ell/2 &= v(au - \bar{d}\bar{u} + \tau) \geq n - \frac{\ell}{2} - r. \end{aligned}$$

Meanwhile, in the $\frac{b-\tau}{2a}$ case, we get

- If $m < n - \frac{\ell}{2} + \delta$, the nonempty condition becomes

$$\begin{aligned}\delta &= v(4 - N(b - \tau)) \geq n - \frac{\ell}{2} - r \\ \ell/2 &= v(au - \bar{d}\bar{u} - \tau) \geq m - \delta - r.\end{aligned}$$

- If $m \geq n - \frac{\ell}{2} + \delta$, the nonempty condition becomes

$$\begin{aligned}v(1 - u\bar{u}) &\geq m - \delta - r \\ \ell/2 &= v(au - \bar{d}\bar{u} - \tau) \geq n - \frac{\ell}{2} - r.\end{aligned}$$

First case The first case is the union of two regions:

$$\max(1, \ell + r + 1) \leq n \leq -\frac{\ell}{2} + \delta + r + v(1 - u\bar{u}), \quad n - r \leq m \leq \max\left(n - \frac{\ell}{2} + \delta, v(1 - u\bar{u}) - \frac{\ell}{2} + \delta + r\right) \quad (6.25)$$

and

$$\max(1, \ell + r + 1) \leq n \leq \frac{\ell}{2} + \delta + r, \quad n - r \leq m \leq \max\left(n - \frac{\ell}{2} + \delta, \delta + \frac{\ell}{2} + r\right) \quad (6.26)$$

Note the condition that $m \leq n + \delta + r$ is redundant with $m \leq n - \frac{\ell}{2} + r$ since $\ell, \delta, r \geq 0$ for $v(b) = v(d) = 0$.

may cause
pain for
 $v(b), v(d) < 0$

Second case The second case is the disjoint union of two bounds:

$$\leq n \leq \quad \leq m \leq \quad (6.27)$$

and

$$\leq n \leq \quad \leq m \leq \quad (6.28)$$

Note the condition that $m \leq n + \delta + r$ is redundant with $m \leq n - \frac{\ell}{2} + r$ since $\ell, \delta, r \geq 0$ for $v(b) = v(d) = 0$.

TODO: finish

§6.5 Evaluation of the integral

§6.5.1 Region where $n \leq 0$ for all values of ℓ

Proposition 6.5.1

The contribution to the integral $O(\gamma, s)$ over $n \leq 0$ is exactly

$$q^{2(\delta+r)s} \sum_{j=0}^{\delta+2r} q^{-2js} = q^{-2rs} + \dots + q^{2(\delta+r)s}.$$

Chứng minh. For $n = 0$ we get a contribution of

$$\begin{aligned}
& \kappa \int_{t, t_1 \in E} \mathbf{1}(n = 0) \mathbf{1}(\gamma, t, m) q^{2s \cdot m} q^{-2m} t t_1 \\
&= \kappa(t : n = 0) \sum_{m=-r}^{\delta+r} (t_1 : -v(t_1) = m) q^{2m(s-1)} \\
&= \kappa \left(1 - \frac{q+1}{q^2}\right) \sum_{m=-r}^{\delta+r} (q^{2m} (1 - q^{-2})) q^{2m(s-1)} \\
&= \kappa \left(1 - \frac{q+1}{q^2}\right) (1 - q^{-2}) \sum_{m=-r}^{\delta+r} q^{2ms}.
\end{aligned}$$

For the region where $v(t) = -k < 0$, for each individual $k > 0$,

$$\begin{aligned}
& \kappa \int_{t, t_1 \in E} \mathbf{1}(v(t) = -k) \mathbf{1}(\gamma, t, m) q^{s(2m-n)} q^{2n-2m} t t_1 \\
&= \kappa(t : v(t) = -k) \sum_{m=-r-k}^{\delta+r-k} (t_1 : -v(t_1) = m) q^{s(2m+2k)-4k-2m} \\
&= \kappa q^{2k} (1 - q^{-2}) \sum_{m=-r-k}^{\delta+r-k} (q^{2m} (1 - q^{-2})) q^{s(2m+2k)-4k-2m} \\
&= \kappa q^{2k} (1 - q^{-2}) \sum_{m=-r-k}^{\delta+r-k} (q^{2m} (1 - q^{-2})) q^{s(2m+2k)-4k-2m} \\
&= \kappa q^{-2k} (1 - q^{-2})^2 \sum_{m=-r-k}^{\delta+r-k} q^{2(m+k)s} \\
&= \kappa q^{-2k} (1 - q^{-2})^2 \sum_{i=-r}^{\delta+r} q^{2is}.
\end{aligned}$$

Since $\sum_{k>0} q^{-2k} = \frac{q^{-2}}{1-q^{-2}}$, we find that the total contribution across both the $n = 0$ case and the $k > 0$ case is

$$\begin{aligned}
& \left(\left(1 - \frac{q+1}{q^2}\right) (1 - q^{-2}) + q^{-2}(1 - q^{-2}) \right) \kappa \sum_{i=-r}^{\delta+r} q^{2is} \\
&= (1 - q^{-1}) (1 - q^{-2}) \kappa \sum_{i=-r}^{\delta+r} q^{2is} \\
&= \sum_{i=-r}^{\delta+r} q^{2is}.
\end{aligned}$$

This equals the claimed sum above. (We write it over $0 \leq j \leq \delta + 2r$ for consistency with a later part.) $\square$

§6.5.2 Region where $n > 0$ for odd ℓ

Again using $(t_1 : -v(t_1) = m) = q^{2m}(1 - q^{-2})$, summing the two cases gives

$$\begin{aligned}
& \kappa \int_{t, t_1 \in E} \mathbf{1}(n > 0) \mathbf{1}(\gamma, t, m) \\
&= \kappa \sum_{n=1}^{\min(\ell, 2\delta)+r} \sum_{m=n-r}^{\lceil \frac{n-r}{2} \rceil + \delta + r - 1} q^{-n - \lceil \frac{n-r}{2} \rceil} \left(1 - \frac{1}{q}\right) \\
&\quad \cdot (-1)^n q^{s(2m-n)} q^{2n-2m} \cdot q^{2m}(1 - q^{-2}) \\
&+ \kappa \sum_{n=1}^{\ell+r} \sum_{m=\max(n-r, \lceil \frac{n-r}{2} \rceil + \delta + r)}^{\min(n, \ell) + \delta + r} q^{-n - (m - \delta - r)} \left(1 - \frac{1}{q}\right) \\
&\quad \cdot (-1)^n q^{s(2m-n)} q^{2n-2m} \cdot q^{2m}(1 - q^{-2}) \\
&= \sum_{n=1}^{\min(\ell, 2\delta)+r} \sum_{m=n-r}^{\lceil \frac{n-r}{2} \rceil + \delta + r - 1} q^{-n - \lceil \frac{n-r}{2} \rceil} \cdot (-1)^n q^{s(2m-n)} q^{2n} \\
&+ \sum_{n=1}^{\ell+r} \sum_{m=\max(n-r, \lceil \frac{n-r}{2} \rceil + \delta + r)}^{\min(n, \ell) + \delta + r} q^{-n - (m - \delta - r)} \cdot (-1)^n q^{s(2m-n)} q^{2n} \\
&= \sum_{n=1}^{\min(\ell, 2\delta)+r} \sum_{m=n-r}^{\lceil \frac{n-r}{2} \rceil + \delta + r - 1} q^{n - \lceil \frac{n-r}{2} \rceil} \cdot (-1)^n q^{s(2m-n)} \\
&+ \sum_{n=1}^{\ell+r} \sum_{m=\max(n-r, \lceil \frac{n-r}{2} \rceil + \delta + r)}^{\min(n, \ell) + \delta + r} q^{n - (m - \delta - r)} \cdot (-1)^n q^{s(2m-n)} \\
&= \sum_{n=1}^{\min(\ell, 2\delta)+r} \sum_{m=n-r}^{n - \lfloor \frac{n+r}{2} \rfloor + \delta + r - 1} q^{\lfloor \frac{n+r}{2} \rfloor} \cdot (-1)^n q^{s(2m-n)} \\
&+ \sum_{n=1}^{\ell+r} \sum_{m=\max(n-r, n - \lfloor \frac{n+r}{2} \rfloor + \delta + r)}^{\min(n, \ell) + \delta + r} q^{n - (m - \delta - r)} \cdot (-1)^n q^{s(2m-n)}.
\end{aligned}$$

To simplify the expressions, we replace the summation variable m with

$$j := (n + \delta + r) - m \geq 0.$$

In that case, $2m - n = 2(\delta + n + r - j) - n = n + 2\delta + 2r - 2j$. Then the expression rewrites as

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\min(\ell, 2\delta)+r} \sum_{j=\lfloor \frac{n+r}{2} \rfloor + 1}^{\delta + 2r} q^{\lfloor \frac{n+r}{2} \rfloor} \cdot (-1)^n q^{s(n+2\delta+2r-2j)} \\
&+ \sum_{n=1}^{\ell+r} \sum_{j=n - \min(n, \ell)}^{\min(\delta + 2r, \lfloor \frac{n+r}{2} \rfloor)} q^j \cdot (-1)^n q^{s(n+2\delta+2r-2j)}
\end{aligned}$$

We interchange the order of summation so that it is first over j and then n .

- The permissible values of j in the second sum clearly run from $j = \lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor + 1$ to $j = \delta + 2r$. The constraints for n are that $n \geq 1$, $n \leq \min(\ell, 2\delta) + r$, and $\lfloor \frac{n+r}{2} \rfloor + 1 \leq j$, which solves to $\frac{n+r}{2} \leq j - \frac{1}{2}$ or $n \leq 2j - 1 - r$.

- The second sum was over pairs (n, j) satisfying $1 \leq n \leq \ell + r$ and $j \geq 0$, $j \geq n - \ell$, and $j \leq \lfloor \frac{n+r}{2} \rfloor$. Hence we now have

$$0 \leq j \leq \min \left(\delta + 2r, \left\lfloor \frac{\ell}{2} \right\rfloor + r \right).$$

Solving for n gives $\max(1, 2j - r) \leq n \leq \ell + r$.

Hence we get

$$\begin{aligned} & \sum_{j=\lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor + 1}^{\delta+2r} \sum_{n=1}^{\min(2j-1-r, \ell+r, 2\delta+r)} q^{\lfloor \frac{n+r}{2} \rfloor} \cdot (-1)^n q^{s(n+2\delta+2r-2j)} \\ & + \sum_{j=0}^{\min(\delta+2r, \lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor + r)} \sum_{n=\max(1, 2j-r)}^{\ell+\min(j, r)} q^j \cdot (-1)^n q^{s(n+2\delta+2r-2j)}. \end{aligned}$$

At this point, two of the bounds on j are redundant. In the first sum, if $j < \lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor + 1$, the sum is empty anyway. Similarly, the second sum is empty anyway if $j > \lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor + r$. Therefore we can unify the two parts for the same range $0 \leq j \leq \delta + 2r$ to get

$$q^{2(\delta+r)s} \sum_{j=0}^{\delta+2r} \left(\sum_{n=1}^{\min(2j-1-r, \ell+r, 2\delta+r)} q^{\lfloor \frac{n+r}{2} \rfloor} \cdot (-1)^n q^{s(n-2j)} + \sum_{n=\max(1, 2j-r)}^{\ell+\min(j, r)} q^j \cdot (-1)^n q^{s(n-2j)} \right).$$

§6.5.3 Region where $n > 0$ for even ℓ

[title=References]