XUNG QUANH PHÉP VỊ TỰ

Nhóm 3*
Toán K8 Chuyên Bảo Lộc

Mục lục

LỜI MỞ ĐẦU

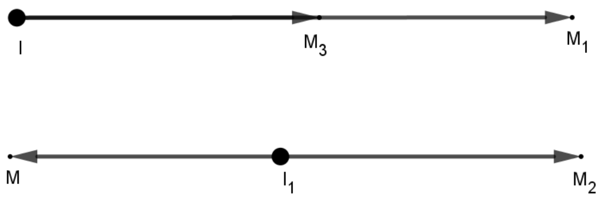
Bạn đọc thân mến!
Không phóng đại khi nói rằng học sinh chuyên Toán như những nhà thám hiểm đang miệt mài tìm tòi lối đi, chinh phục kho báu là những tri thức toán học chuyên sâu. Trên con đường ấy, họ gặp không ít trở ngại, mà một trong số đó là Hình học phẳng. Chính vì thế, với tinh thần làm việc hết sức hăng say và nghiêm túc, chúng tôi viết chuyên đề này với mục tiêu và hy vọng chia sẻ được sự phấn khích, lan tỏa đam mê trong nghiên cứu toán học nói chung và mảng hình học nói riêng. Hình học có thể giúp chúng ta mở khóa những bí ẩn trong khu vườn toán học và là một phần cực kỳ quan trọng và không thể thiếu trong bất kỳ đề thi HSG hay kiểm tra định kỳ nào trong phân phối chương trình toán học THPT. Nhưng hơn thế nữa, việc chinh phục được hình học mang tính quyết định lớn đến thành công trên con đường toán học của học sinh chuyên Toán chúng ta.
Bạn đọc hãy nhâm nhi từng lời giải hay, những ý tưởng độc đáo, những sáng kiến lạ kỳ trong cách giải từng bài toán để từ đó rút ra bài học và kinh nghiệm cho mình trong học tập, giúp bạn thêm yêu , thêm tin vào sức mạnh của Toán học.
Mặc dù đã dành rất nhiều thời gian và tâm huyết, song sai sót vẫn rất khó tránh khỏi, vì vậy mong độc giả thông cảm và có thể góp ý vào gmail của chúng tôi:
/llehoangvum10@gmail.com/ để chúng tôi rút kinh nghiệm để hoàn thành những chuyên đề tốt hơn trong thời gian tới.
Chân thành cảm ơn!

Chương 1

Kiến thức cơ sở

1.1 Định nghĩa phép vị tự

Cho điểm I cố định và một số thực $k \neq 0$, phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{IM'} = k.\overrightarrow{IM}$ được gọi là phép vị tự tâm I, tỉ số k, ký hiệu $V_{(I,k)}$.
Trong đó M' được gọi là ảnh của M, M đươc gọi là tạo ảnh của M', I là tâm của phép vị tự, k là tỉ số vị tự.



Từ định nghĩa trên, ta suy ra được những hệ quả cơ bản:
+) k=1: $V_{(I,k)}$ được gọi là phép đồng nhất.
+) k=-1: $V_{(I,k)}$ chính là phép đối xứng tâm I. Khi đó tâm vị tự trở thanh tâm đối xứng.
+) $k > 0$: $V_{(I,k)}$ được gọi là phép vị tự dương.
+) $k < 0$: $V_{(I,k)}$ được gọi là phép vị tự âm.

1.2 Tính chất

Trong thực hành giải những dạng toán về phép vị tự , ta thường dựa vào các tính chất sau.
Tính chất 1. *Phép vị tự $V_{(I,k)}$ với $k \neq 1$ có một điểm bất động duy nhất, đó là điểm I.*

Chứng minh. Giả sử I' là điểm bất động thứ hai của$V_{(I,k)}$ thì $V_{(I,k)} : I' \mapsto I$ và ta có:

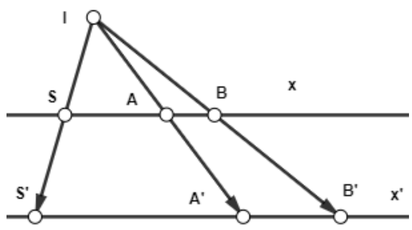
$$\overrightarrow{II'} = k.\overrightarrow{II'} \Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{II'} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{II'} = \overrightarrow{0}$$

.

Hệ thức này chứng tỏ $I \equiv I' \Rightarrow$ đpcm. $\square$

Tính chất 2. *Nếu điểm M' là ảnh của điểm M qua phép vị tự $V_{(I,k)}$ thì 3 điểm I,M, M' thẳng hàng.*

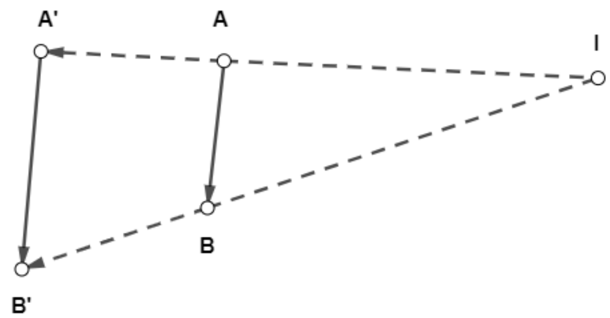
Chứng minh. Theo định nghĩa $V_{(I,k)} : M' \mapsto M \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = k.\overrightarrow{IM}$.



Hệ thức này chứng tỏ $\overrightarrow{IM}$ cùng phương với $\overrightarrow{IM'}$. Vì các vectơ $\overrightarrow{IM}$ và $\overrightarrow{IM'}$ chung gốc I nên $\overrightarrow{IM}$ và $\overrightarrow{IM'}$ cùng nằm trên một đường thẳng. $\square$

Tính chất 3. *Nếu A', B' là ảnh của hai điểm phân biệt A, B qua phép vị tự $V_{(I,k)}$ thì $\overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{AB}$.*

Chứng minh. Từ các hệ thức $\overrightarrow{IA'} = k.\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB'} = k.\overrightarrow{IB}$,
ta suy ra $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{IB'} - \overrightarrow{IA'} = k.\overrightarrow{IB} - k.\overrightarrow{IA} = k(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA}) = k.\overrightarrow{AB}$.



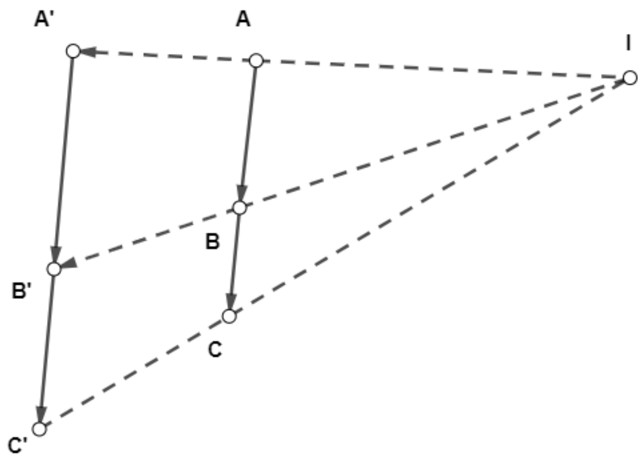
$\square$

Tính chất 4. *Phép vị tự $V_{(I,k)}$ là phép biến hình $1-1$ và có phép biến hình ngược. Đó là phép vị tự $V_{(I,\frac{1}{k})}$.*

Chứng minh. Nếu M_1 và M_2 có cùng một ảnh M' qua phép vị tự $V_{(I,k)}$ thì ta có:
$\overrightarrow{IM'} = k.\overrightarrow{IM_1}$ và $\overrightarrow{IM'} = k.\overrightarrow{IM_2}$
$\Rightarrow k.\overrightarrow{IM_1} = k.\overrightarrow{IM_2} \Rightarrow \overrightarrow{IM_1} = \overrightarrow{IM_2} \Rightarrow M_1 \equiv M_2$. Nếu $\overrightarrow{IM'} = k.\overrightarrow{IM}$ thì $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{k}.\overrightarrow{IM'}$.
Điều này chứng tỏ $V_{(I,\frac{1}{k})} : M' \mapsto M$. $\square$

Tính chất 5. *Phép vị tự $V_{(I,k)}$ biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng.*

Chứng minh. Kí hiệu A', B', C' là ảnh của ba điểm thẳng hàng A,B, C. Ta có $\overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'C'} = k.\overrightarrow{AC}$.



Vì A,B, C thẳng hàng nên tồn tại số m sao cho $\overrightarrow{AB} = m.\overrightarrow{AC}$. Vậy thì

$$k.\overrightarrow{AB} = m.k.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = m.\overrightarrow{A'C'}$$

.
Hệ thức đó chứng tỏ A', B', C' thẳng hàng. □

Tính chất 6. *Cho hai phép vị tự $V_{(I,k)}$ và $V_{(I',k')}$ với các tâm vị tự phân biệt, các hệ số vị tự k, k' khác 0, khác 1 và $k.k' \neq 1$. Khi đó phép biến đổi $V = V_{(I',k')} \circ V_{(I,k)}$ là phép vị tự. Gọi S là điểm bất động của V*

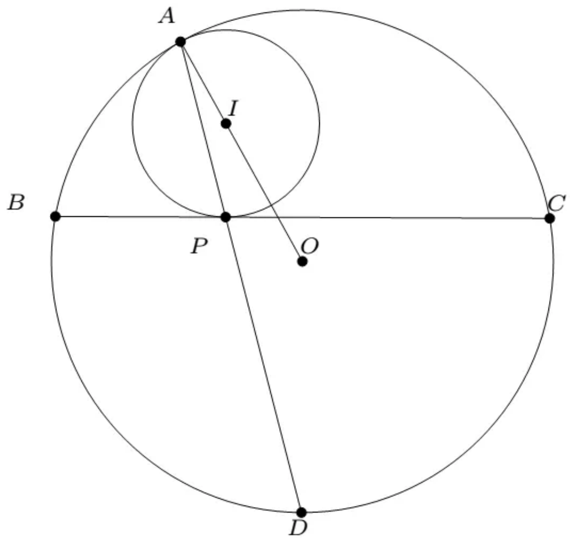
Chứng minh. Ta sẽ đi chứng minh $V = V_{(I',k')} \circ V_{(I,k)}$ là phép vị tự. Trước hết ta cần chứng tỏ V có điểm bất động duy nhất. Gọi S là điểm bất động của V, khi đó
$V_{(I,k)} : S \mapsto S'$ và $\overrightarrow{IS'} = k.\overrightarrow{IS}$
$V_{(I',k')} : S' \mapsto S$ và $\overrightarrow{I'S} = k'.\overrightarrow{I'S'}$

Từ các kết quả trên ta suy ra $\overrightarrow{IS} = \lambda.\overrightarrow{II'}$, trong đó $\lambda = \frac{1-k'}{1-k.k'}$.
Nếu M là điểm bất kì khác S, theo định nghĩa ta có
$V_{(I,k)} : S \mapsto S'$ và $M \mapsto M' \Rightarrow \overrightarrow{S'M'} = k.\overrightarrow{SM}$
$V_{(I',k')} : S' \mapsto S$ và $M' \mapsto M'' \Rightarrow \overrightarrow{SM''} = k'.\overrightarrow{S'M'}$.

Từ các kết quả trên ta suy ra $\overrightarrow{SM''} = k.k'.\overrightarrow{SM}$. Đó là điều phải chứng minh. Với phép biến đổi V^*, cách chứng minh tương tự.

□

Tính chất 7. *Cho hai đường tròn (O) và (I) tiếp xúc trong tại A. Một dây cung BC của (O) tiếp xúc với (I) tại P. Khi đó AP đi qua điểm D chính giữa cung BC của (O) và $DP.DA = DB^2$.*



Chứng minh: Xét phép vị tự $H(A) : (I) \mapsto (O)$. Khi đó $P \mapsto D$. Suy ra $IP||OD$ mà $IP \perp BD$.

Suy ra $OD \perp BC$. Do đó D là điểm chính giữa cung BC

Chú ý: Tích của một phép vị tự tỉ số k với một phép dời hình (hay một phép dời hình với một phép vị tự tỉ số k) gọi là một phép đồng dạng tỉ số $|k|$
Khi đó dễ thấy phép đồng dạng tỉ số $|k|$ cũng có các hệ quả 3, 4, 5, 6.

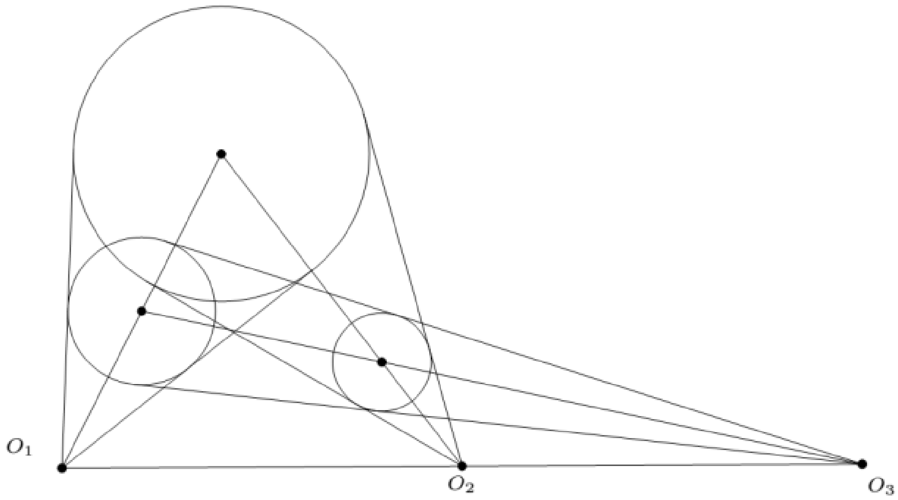
1.3 Định lý và các hệ quả

Định lý 1. *(Tích của 2 phép vị tự) Ta xét tích của 2 phép vị tự $H_1(O_1; K_1)$ và $H_2(O_2; K_2)$:*

1. Trường hợp 1: Nếu $k_1k_2 = 1$ thì tích $H_2(O_2; k_2)oH_1(O_1; k_1)$ là một phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{v} = (1 - k_2)\overrightarrow{O_1O_2}$

2. Trường hợp 2: $k_1k_2 \neq 1$ thì tích $H_2(O_2; k_2)oH_1(O_1; k_1)$ là một phép vị tự tỉ số $k = k_1k_2$ và có tâm O được xác định bởi công thức $\overrightarrow{OO_1} = \dfrac{k_2+1}{k_1k_2}\overrightarrow{OO_2}$

Định lý 2. *(Monge – D'alambert)*
Cho ba đường tròn $C_1(O_1, R_1)$, $C_2(O_2, R_2)$, $C_3(O_3, R_3)$ phân biệt trên mặt phẳng. Khi đó tâm vị tự ngoài của các cặp đường tròn $(C_1; C_2)$,(C_2, C_3), (C_3, C_1) cùng thuộc một đường thẳng. Hai tâm vị tự trong của hai trong ba cặp đường tròn trên và tâm vị tự ngoài của cặp đường tròn còn lại cùng thuộc một đường thẳng.

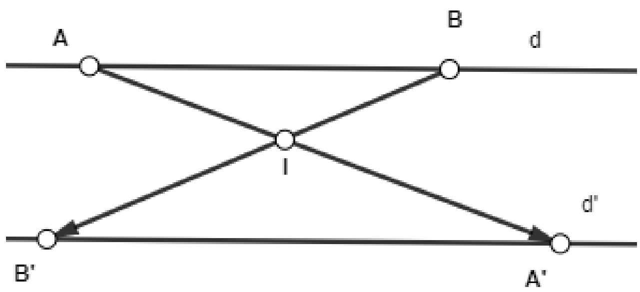


Định lý 3. *Nếu có một phép nghịch đảo tâm I biến (O) thành (O') thì sẽ có một phép vị tự tâm I biến (O) thành (O').*

Định lý 4. *Cho hai đường tròn $C(O;R)$ và $C'(O';R')$ sao cho $R \neq R', O \equiv O'$. Khi đó tồn tại hai phép vị tự $H_1(O_1;k_1)$ và $H_2(O_2;k_2)$ biến C thành C' trong đó: $\frac{\overline{O_1O}}{\overline{O_1O'}} = k_1 = \frac{R'}{R}$ và $\frac{\overline{O_2O}}{\overline{O_2O'}} = k_2 = -\frac{R'}{R}$*

Hệ quả 1. *Phép vị tự $V_{(I,k)}$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d' và $d'//d$ hoặc $d' \equiv d$.*

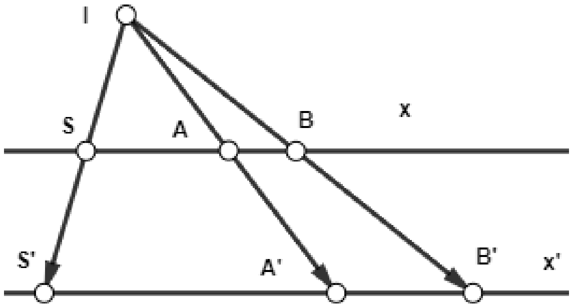
Chứng minh. Trên d ta lấy hai điểm phân biệt A, B. Gọi A', B' là ảnh của A, B qua phép vị tự đó. Nếu C là điểm bất kì thuộc d và C là ảnh của C thì theo tính chất 5, C' thuộc đường thẳng $A'B'$.



Đảo lại, nếu C' là điểm tùy ý thuộc $A'B'$ và điểm C là ảnh của C' qua phép vị tự $V_{(I,\frac{1}{k})}$ thì C phải thuộc AB vì các điểm A, B cũng là ảnh của A', B' qua phép vị tự đó. Vậy tồn tại điểm C trên đường thẳng AB nhận C' là ảnh. Nếu A' thuộc d thì d và d' trùng nhau. Nếu A' không thuộc d thì $d//d'$. □

Hệ quả 2. *Phép vị tự $V_{(I,k)}$ biến tia Sx thành tia $S'x'$ và hai tia đó hoặc song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.*

Chứng minh. Thật vậy, nếu A, B là hai điểm phân biệt thuộc Sx và khác S thì tồn tại số $m > 0$ sao cho $\overrightarrow{SB} = m.\overrightarrow{SA}$. Theo Hệ quả 1, ảnh A', B' của A, B nằm trên đường thẳng $S'x'$.



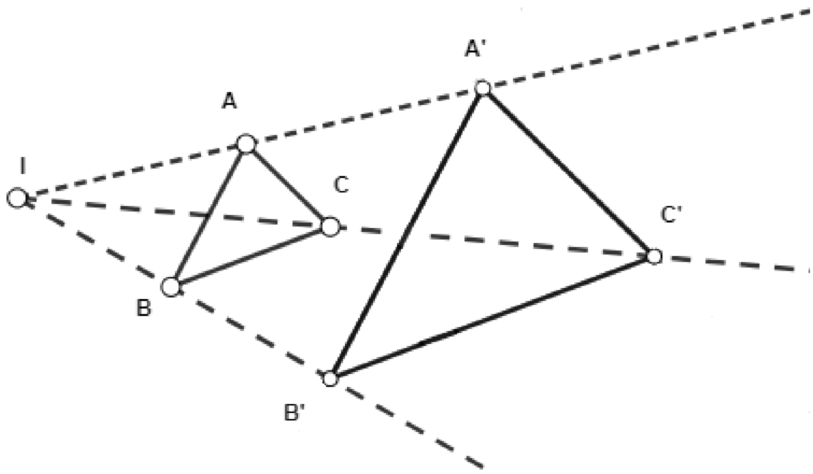
Theo tính chất 3, ta có: $\overrightarrow{S'B'} = k.\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{S'A'} = k.\overrightarrow{SA}$
$\Rightarrow \overrightarrow{S'B'} = k.m.\overrightarrow{SA} = m.\overrightarrow{S'A'}$.
Điều đó chứng tỏ A', B' thuộc một tia của $S'x'$, ta gọi A, B là ảnh của A', B' trong phép vị tự $V_{(I,\frac{1}{k})}$. Bằng cách lập luận tương tự, ta chứng minh được điểm B trên tia Sx nhận B' là ảnh trong phép vị tự đang xét. □

Hệ quả 3. *Phép vị tự $V_{(I,k)}$ biến đoạn thẳng PQ thành đoạn thẳng $P'Q'$ với $P'Q' = |k|.PQ$.*

Chứng minh. Mỗi đoạn được xem như hiệu của hai tia(tập hợp điểm thuộc tia này không thuộc tia kia) và chứng minh tương tự như trường hợp kia. □

Hệ quả 4. *Phép vị tự $V_{(I,k)}$ biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ và hai tam giác đó đồng dạng, tỉ số đồng dạng bằng $|k|$.*

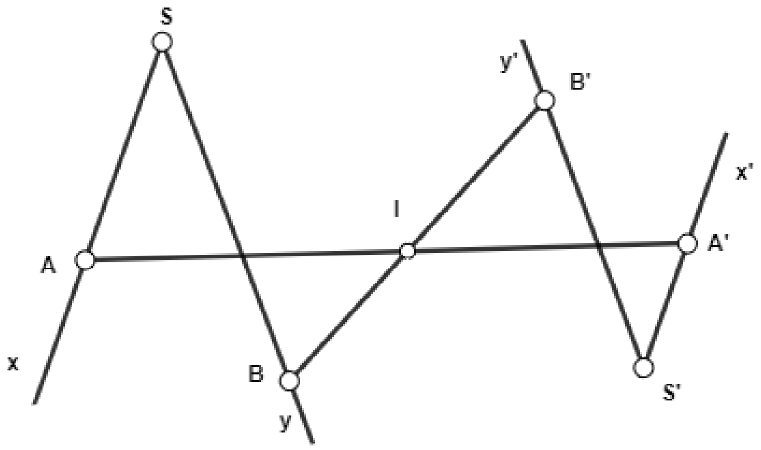
Chứng minh. Nếu A', B', C' lần lượt là ảnh của A, B, C qua phép vị tự thì ta có $\overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{B'C'} = k.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{C'A'} = k.\overrightarrow{CA}$
$\Leftrightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = |k|$.



Vậy $ABC \sim A'B'C'$, tỉ số đồng dạng là $|k|$. □

Hệ quả 5. *Phép vị tự $V_{(I,k)}$ biến góc xSy thành góc $xS'y'$ và $xS'y' = xSy$.*

Chứng minh. Lấy trên Sx , Sy hai điểm A, B (khác S). Gọi A', B' là ảnh của A, B. Tam giác $S'A'B'$ là ảnh của tam giác SAB , theo hệ quả 4, tam giác SAB đồng dạng với tam giác $S'A'B'$, do đó các góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau.



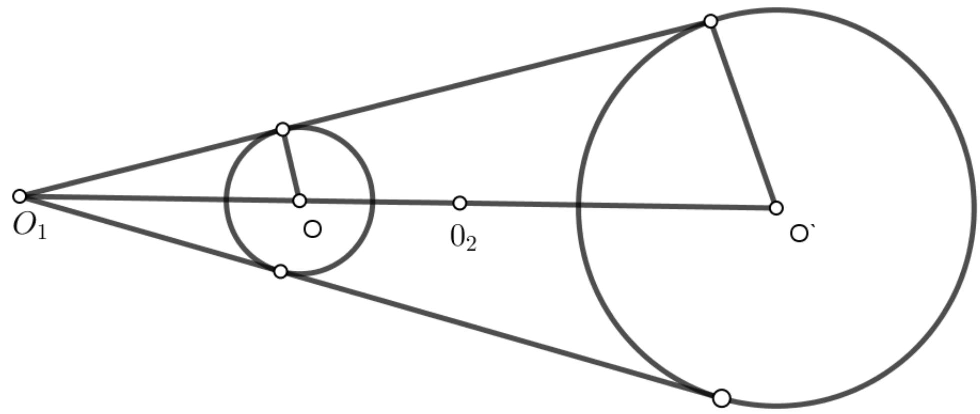
Vậy $xS'y' = xSy$. □

Hệ quả 6. *Phép vị tự $V_{(I,k)}$ biến đường tròn (I_1, R) thành đường tròn (I_2, R') và $R' = |k|.R$*

Chứng minh. Lấy điểm M bất kì thuộc đường tròn (I_1, R) và gọi M' là ảnh của M, theo tính chất 3 ta có
$\overrightarrow{I_2M'} = k.\overrightarrow{I_1M} \Rightarrow I_2M' = |k|.I_1M$
Đẳng thức đó chứng tỏ M' nằm trên đường tròn $(I_2; |k|.R)$.
Đảo lại, nếu M' thuộc $(I_2; |k|.R)$ thì ảnh M của M' trong phép vị tự $V_{(I,\frac{1}{k})}$ thuộc đường tròn (I_1, R).
Thật vậy $V_{(I,\frac{1}{k})} : I' \mapsto I, M' \mapsto M$
Do đó $\overrightarrow{I_2M'} = k.\overrightarrow{I_1M}$
$\Rightarrow IM = \frac{1}{|k|}.I'M' = \frac{1}{|k|}.|k|R = R.$

Hệ quả 7. *(Suy ra từ định lý 2) Bốn điểm O, O', O_1, O_2 tạo thành một hàng điểm điều hòa.*

.



Hệ quả 8. *Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau tại điểm A. Khi đó có một phép vị tự tâm A biến đường tròn này thành đường tròn kia*

1.4 Biểu thức tọa độ của phép vị tự

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $I\left(x_0;y_0\right)$, $M\left(x;y\right)$, gọi $M'\left(x';y'\right)=V_{(I;k)}\left(M\right)$ thì
$$\begin{cases} x\prime = kx + (1-k)x \\ y\prime = ky + (1-k)y \end{cases}$$

1.5 Tâm vị tự của hai đường tròn

• Với hai đường tròn bất kì luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia, tâm của phép vị tự này được gọi là tâm vị tự của hai đường tròn.
• Cho hai đường tròn $(I;R)$ và $(I';R')$.
+ Nếu $I\equiv I'$ thì các phép vị tự $V_{\left(I;\pm\frac{R'}{R}\right)}$ biến $(I;R)$ thành $(I';R')$.
+ Nếu $I\neq I'$ và $R\neq R'$ thì các phép vị tự $V_{\left(O;\frac{R'}{R}\right)}$ và $V_{\left(O_1;-\frac{R'}{R}\right)}$ biến $(I;R)$ thành $(I';R')$. Ta gọi O là tâm vị tự ngoài còn O_1 là tâm vị tự trong của hai đường tròn. + Nếu $I\neq I'$ và $R=R'$ thì có $V_{(O_1;-1)}$ biến $(I;R)$ thành $(I';R')$.

Phép vị tự là một khái niệm đơn giản với những kết quả thú vị. Nó rất hữu ích để chứng minh tính cộng tuyến, đồng dạng, xác định tỷ lệ và xây dựng điểm.

Chương 2

Các dạng toán phép vị tự

2.1 Xác định ảnh của một hình qua phép vị tự

Phương pháp:

Dùng định nghĩa, tính chất và biểu thức tọa độ của phép vị tự.

Ví dụ 1

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $5x + 2y - 7 = 0$. Hãy viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$.

Lời giải: **Cách 1:**

Lấy $M(x; y) \in d \Rightarrow 5x + 2y - 7 = 0$
Gọi $M'(x'; y') = V_{(O;--2)}(M)$. Theo biểu thức tọa độ của phép vị tự, ta có:
$\begin{cases} x\prime = -2x + [1 - (-2)] \\ y\prime = -2y + [1 - (-2)] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -12x\prime \\ y = -12y\prime \end{cases}$
Thay vào $(*)$ ta được $-\frac{5}{2}x' - y' - 7 = 0 \Leftrightarrow 5x' + 2y' + 14 = 0$
Vậy $d' : 5x + 2y + 14 = 0$

Cách 2:

Do d' song song hoặc trùng với d nên phương trình d' có dạng: $5x + 2y + c = 0$ Lấy $M(1; 1)$ thuộc d
Gọi $M'(x'; y') = V_{(O;--2)}(M)$, ta có: $\overrightarrow{OM'} = -2\overrightarrow{OM}$
Thay vào $(*)$ ta được $c = 14$ Vậy $d' : 5x + 2y + 14 = 0$

□

Ví dụ 2

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn(C) : $(x-1)^2+(y-1)^2=4$. Tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm $I\,(-1;2)$ tỉ số $k=3$

Lời giải: Đường tròn (C) có tâm $J\,(1;1)$, bán kính $R=2$.
Gọi $J'\,(x';y')=V_{(I;3)}\,(J)\Rightarrow \overrightarrow{IJ'}=3\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\prime-1=3(1+1)\\ y\prime-1=3(1-2)\end{array}\right.\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\prime=7\\ y\prime=-2\end{array}\right.$
$\Rightarrow J\prime(7;-2)$ Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự $V_{(I;3)}$ thì (C') có tâm $J'\,(7;-2)$, bán kính $R'=3R=6$.
Vậy $(C'):(x-7)^2+(y+2)^2=36$. □

2.2 Tìm tâm vị tự của hai đường tròn

Ví dụ 3.

Cho hai đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=4$ và $(C'):(x-8)^2+(y-4)^2=16$. Tìm tâm vị tự của hai đường tròn.

Lời giải: Ta có: Đường tròn (C) có tâm $I\,(1;2)$, bán kính $R=2$, đường tròn (C') có tâm $I'\,(8;4)$, bán kính $R'=4$.
Do $I\neq I'$ và $R\neq R'$ nên có hai phép vị tự $V_{(J;2)}$ và $V_{(J';--2)}$ biến (C) thành (C').
Gọi $J\,(x;y)$.
Với $k=2$, ta có: $\overrightarrow{JI'}=2\overrightarrow{JI}\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 8-x=2(2-x)\\ 4-y=2(1-y)\end{array}\right.\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-4\\ y=-2\end{array}\right.\Rightarrow J\,(-4;-2)$.
Tương tự với $k=-2$, suy ra $J'\,(4;2)$. □

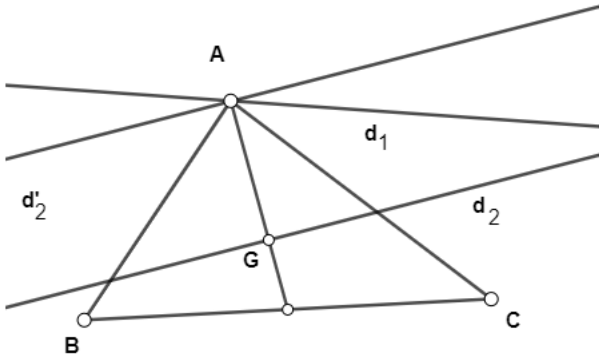
2.3 Dùng phép vị tự để giải các bài toán dựng hình

Phương pháp:

Để dựng một hình (H) nào đó, ta quy về dựng một số điểm (đủ để xác định được hình (H)) khi đó ta xem các điểm cần dựng đó là giao của hai đường trong đó một đường có sẵn và một đường là ảnh vị tự của một đường khác.

Ví dụ 4.

Cho hai điểm B,C cố định và hai đường thẳng d_1,d_2 . Dựng tam giác ABC có đỉnh A thuộc d_1 và trọng tâm G thuộc d_2.



Phân tích:
Giả sử đã dựng được tam giác ABC thỏa mãn yêu cầu bài toán. Gọi I là trung điểm của BC, theo tính chất trọng tâm tam giác ta có $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IG}$
$\Rightarrow V_{(I;3)}(G) = A$
Mà $G \in d_2$, $\Rightarrow A \in {d_2}'$ với ${d_2}'$ là ảnh của d_2 qua $V_{(I;3)}$
Ta lại có:$A \in d_1 \Rightarrow A = d_1 \cap {d_2}'$.
Cách dựng:
+ Dựng đường thẳng ${d_2}'$ là ảnh của d_2 qua $V_{(I;3)}$.
+ Dựng giao điểm $A = d_1 \cap {d_2}'$.
+ Dựng giao điểm $G = IA \cap d_2$.
Hai điểm $A; G$ là hai điểm cần dựng.

Lời giải: Rõ ràng từ cách dựng ta có $A \in d_1$, $G \in d_2$, I là trung điểm của BC và $V_{(I;3)}(G) = A \Rightarrow \overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IG} \Rightarrow G$ là trọng tâm tam giác ABC
Nhận xét: Số nghiệm hình của bài toán bằng số giao điểm của d_1 và ${d_2}'$

□

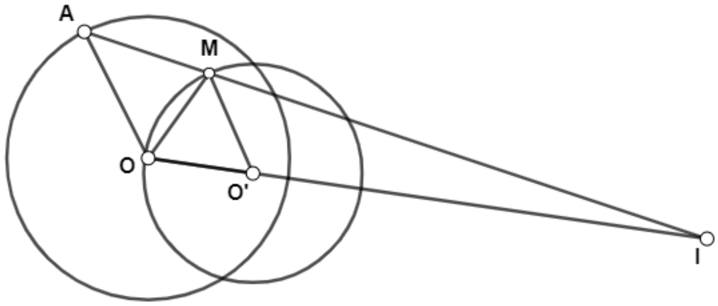
2.4 Dùng phép vị tự giải các bài toán tập hợp điểm

Phương pháp:

Để tìm tập hợp điểm M ta có thể quy về tìm tập hợp điểm N và tìm một phép vị tự $V_{(I;k)}$ nào đó sao cho $V_{(I;k)}(N) = M$ suy ra quỹ tích điểm M là ảnh của quỹ tích qua $V_{(I;k)}$.

Ví dụ 5.

Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm I nằm ngoài đường tròn sao cho $OI = 3R$, A là một điểm thay đổi trên đường tròn $(O; R)$. Phân giác trong góc $\widehat{IOA}$ cắt IA tại điểm M. Tìm tập hợp điểm M khi A di động trên $(O; R)$.

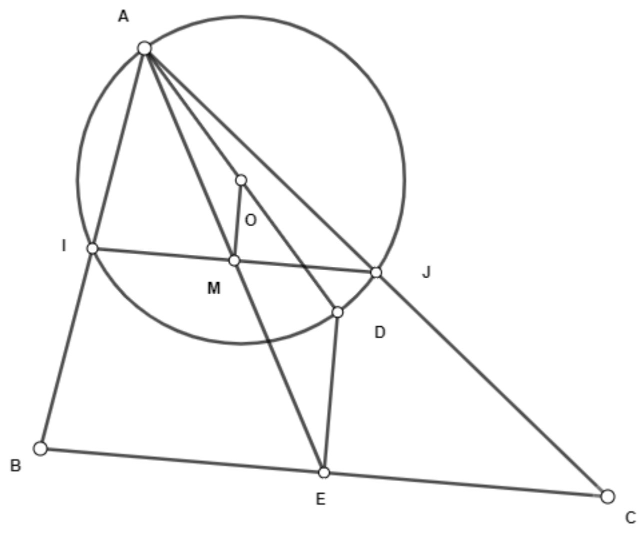


Lời giải: Theo tính chất đường phân giác ta có $\frac{MI}{MA} = \frac{OI}{OA} = \frac{3R}{R} = 3$
$\Rightarrow IM = \frac{3}{4}IA \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IA}$. Suy ra $V_{\left(I;\frac{3}{4}\right)}(A) = M$,mà A thuộc đường tròn $(O;R)$ nên M thuộc $\left(O';\frac{3}{4}R\right)$ ảnh của $(O;R)$ qua $V_{\left(I;\frac{3}{4}\right)}$.
Vậy tập hợp điểm M là $\left(O';\frac{3}{4}R\right)$ ảnh của $(O;R)$ qua $V_{\left(I;\frac{3}{4}\right)}$. □

2.5 Dùng phép vị tự để chứng minh các tính chất hình học phẳng

Ví dụ 6.

Cho tam giác ABC. Gọi I, J, M lần lượt là trung điểm của AB, AC, IJ. Đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác AIJ cắt AO tại D. Gọi E là hình chiếu vuông góc của D trên BC. Chứng minh A, M, E thẳng hàng.



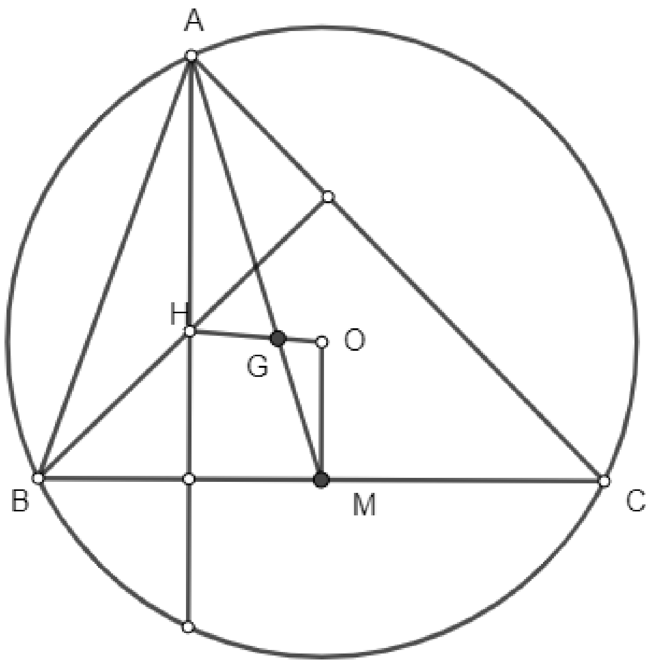
Lời giải: Xét phép vị tự $V_{(A;2)}$, ta có:$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AJ}$ nên $V_{(A;2)}(I) = B$, $V_{(A;2)}(J) = C$, do đó $V_{(A;2)}$ biến tam giác AIJ thành tam giác ABC, suy ra phép vị tự này biến đường tròn (O) thành đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác ABC.
Do $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO} \Rightarrow V_{(A;2)}(O) = D \Rightarrow O' \equiv D$ hay D là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC
Giả sử $V_{(A;2)}(M) = M'$ khi đó $OM \perp IJ \Rightarrow DM' \perp BC \Rightarrow M' \equiv E$
Vậy $V_{(A;2)}(M) = E$ nên A, M, E thẳng hàng. □

Chương 3

Một số ví dụ áp dụng phép vị tự chứng minh các định lý quan trọng

Ví dụ 1. *(Đường thẳng Euler). Chứng minh rằng trong một tam giác, trọng tâm, trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp cùng nằm trên một đường thẳng.*

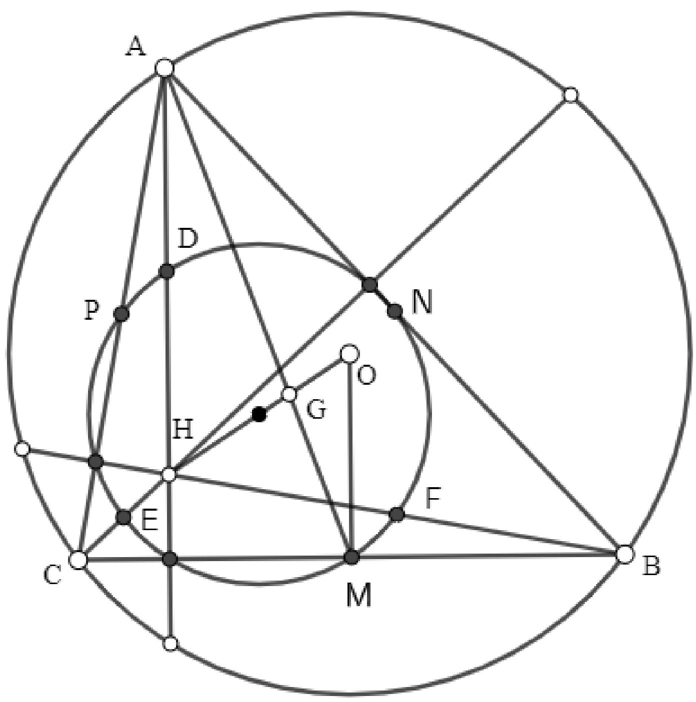
Chứng minh. Xét phép vị tự $\left(G; k = -\frac{1}{2}\right) : A \mapsto M$.
$(AH) \mapsto (d_a)$ (Đường trung trực của BC)
$(BH) \mapsto (d_b), (CH) \mapsto (d_c)$



Suy ra $(AH \cap BH \cap CH) \mapsto (d_a \cap d_b \cap d_c)$
Hay $H \mapsto O$
Suy ra O;G;H thẳng hàng và $\frac{\overline{GO}}{\overline{GH}} = -\frac{1}{2}$ □

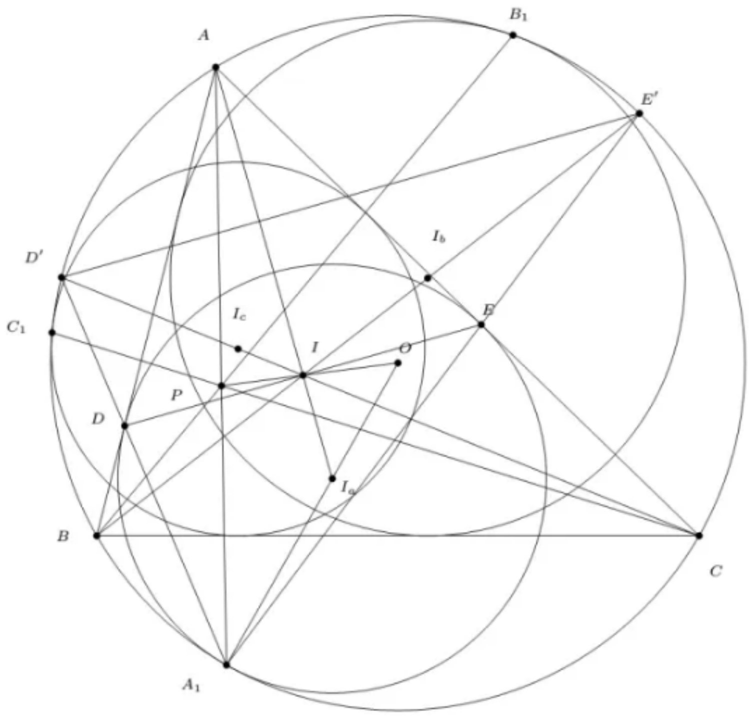
Ví dụ 2. *Trong một tam giác, trung điểm các cạnh, chân các đường cao, trung điểm đoạn thẳng nối từ đỉnh đến trực tâm cùng thuộc một đường tròn (Đường tròn Euler – Đường tròn chín điểm)*

Chứng minh. $\left(G; k = -\frac{1}{2}\right)$
Ta có $A, B, C \mapsto (M, N, P)$
Suy ra $(O) \mapsto (MNP)$
$(O) \mapsto (O')$ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác(MNP)(Đường tròn Euler (ε))
Suy ra O' là trung điểm của OH
Hơn nữa ta có $(H, G, O, O') = -1$ nên H chính là tâm vị tự ngoài của (O) và (O')
Xét phép vị tự $H\left(H; k = \frac{1}{2}\right) : A \mapsto D$.



(Trung điểm AH,$B \mapsto E, C \mapsto F$ mà H:$(O) \mapsto (K; \frac{OH}{2})$ suy ra D,E,$F$$\in (K; \frac{OH}{2})$
Mặt khác H:$A_2 \mapsto A_1, B_2 \mapsto B_1, C_2 \mapsto C_1$. Do đó $A_2, B_2, C_2 \in (K; \frac{OH}{2})$
Vậy ta chứng minh được các điểm đã cho cùng thuộc đường tròn Euler và tâm đường tròn là trung điểm của của đoạn thẳng nối trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. □

Ví dụ 3. *(Đường tròn Mixtilinear incircle)*
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn ω_a tiếp xúc với các cạnh AB, AC tại D, E và tiếp xúc trong với (0) tại A_1. Các điểm B_1, C_1 được xác định tương tự. Chứng minh rằng:
a) DE qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
b) AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.



Chứng minh. a) Theo bổ đề quen thuộc thì A_1D đi qua điểm D' chính giữa cung AB, A_1E đi qua điểm E' chính giữa cung AC. Khi đó $I \in CD'$, $I \in BE'$.
Áp dụng định lý Pascal ta có : D, I, E thẳng hàng.

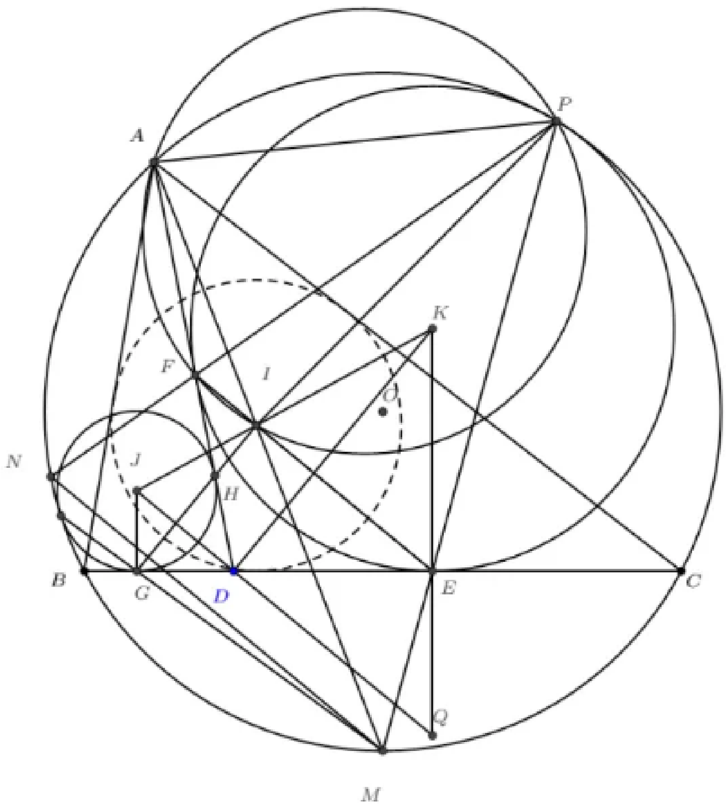
b) Xét $H(A_1) : (O) \mapsto (I_a), H(A) : (I_a) \mapsto (I)$, theo định lý Monge D'lemabert thì AA_1 đi qua tâm vị tự ngoài biến $(O) \mapsto (I)$. Chứng minh tương tự ta cũng có BB_1, CC_1 qua tâm vị tự ngoài biến (O) thành (I).

Do đó các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại một điểm thuộc IO.

□

Ví dụ 4. *(Định lý Thebault)*
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn ω. D là một điểm thuộc cạnh BC. Đường tròn ω_1 tiếp xúc AD, CD tại P, Q và tiếp xúc ω tại W.

a) Chứng minh PQ đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
b) Gọi ω_2 là đường tròn tiếp xúc với AD, BD và tiếp xúc với ω. Chứng minh đường thẳng nối tâm của $\omega_1\omega_2$ đi qua tâm nội tiếp của tam giác ABC.



Chứng minh. a)
Ta có PE qua điểm M chính giữa cung BC. Gọi I' là giao điểm của EF và AM.
Xét phép vị tự tâm P thì $EF//MN$, suy ra $\angle AIF = \angle AMN = \angle APF$. Suy ra $AFIP$ nội tiếp.
Khi đó $\angle AFP = \angle AI'P = \angle I'EP$
Suy ra $MEI' \sim MI'P$. Suy ra $MI'^2 = ME.MP = MB^2$.
Do đó $I' \equiv I$.

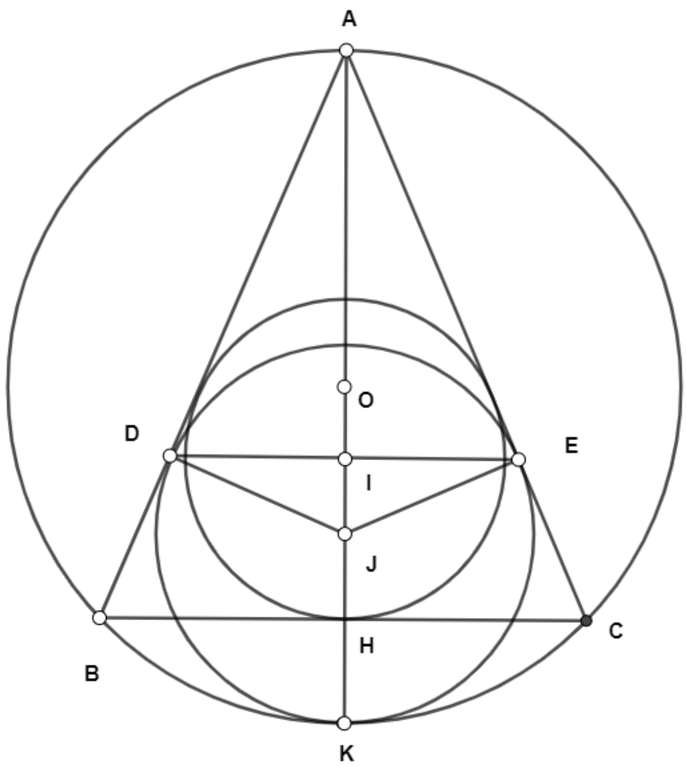
b) Xét tứ giác $JGEK$ và điểm D thuộc GE. Khi đó $IG//DK$ và $IE//DJ$.
Gọi I' là giao điểm IG và JK. Khi đó $\frac{JI\prime}{I\prime K} = \frac{JT}{TD} = \frac{EQ}{EK}$. Suy ra $I'E//JQ$, do đó $I' \equiv I$.
Vậy J, I, K thẳng hàng.

□

Chương 4

Sử dụng phép biến hình để giải 1 số bài toán học sinh giỏi

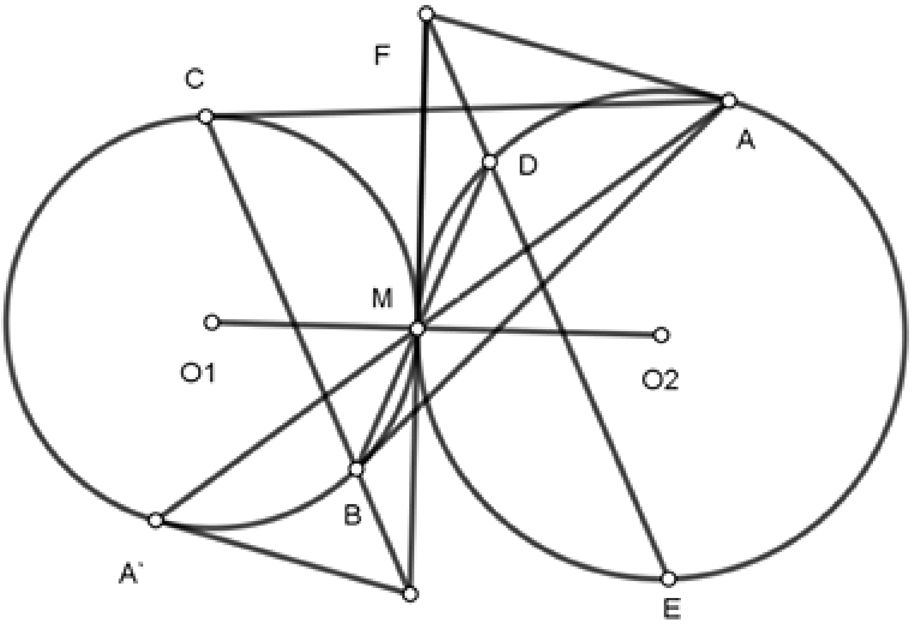
Ví dụ 5. *(Romani 1978): Cho tam giác ABC cân tại A, nội tiếp trong đường tròn (O).Gọi (w) là đường tròn tiếp xúc với AB, AC tại D và E và tiếp xúc trong với (O) tại K. Chứng minh rằng DE đi qua tam nội tiếp của tam giác ABC.*



Chứng minh. Xét phép vị tự $H\left(A; k = \frac{\overline{AH}}{\overline{AK}}\right) : (w) \mapsto (I)$. Gọi I' là trung điểm của DE, ta có $\Delta ABK \sim \Delta ADI(g.g)$ suy ra $\frac{\overline{AH}}{\overline{AK}} = \frac{\overline{AI'}}{\overline{AJ}} \Rightarrow H(A;k) : J \mapsto I'$. Mà I là tâm của (w) nên I' là tâm của (I). □

Ví dụ 6. *(VMO 2003) Cho hai đường tròn (O_1) và (O2) tiếp xúc nhau tại M. Một điểm A thay đổi trên đường tròn (O2), từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC đến (O_2) với B,C là hai tiếp điểm. BM, CM lần lượt cắt(O_2) tại D và E. DE cắt tiếp tuyến tạiA của (O_2) tại F. Chứng minh rằng F thuộc một đường thẳng cố định khi A di chuyển trên (O_2) không thẳng hàng với O_1 và M.*

Chứng minh. Xét phép vị tự $H(M; \frac{R_1}{R_2})$ khi đó $A \mapsto A‘$; $E \mapsto C$; $D \mapsto B$. $(DE) \mapsto (BC)$; $(Ax) \mapsto (A‘y)$ (tiếp tuyến tai $A‘$ của (O_1). Do đó $F \mapsto K$ (giao điểm của $A‘y$ và BC).



Mặt khác, theo một tính chất quen thuộc của cực đối cực thì $A'y$, BC và tiếp tuyến tại$M(Mz)$ của (O_1) đồng quy. Do đó K Mz, mà Mz cũng là tiếp tuyến của (O_2). Do đó F Mz. Vậy F thuộc đường thẳng Mz vuông góc O_1O_2

$\square$

Chương 5

Bài tập tự luyện

Bài 1. *(ĐC HKI - AMS)*
Trong mặt phẳng tọa độp Oxy cho đường tròn
(C): $[(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ *và (C'):* $(x-8)^2 + (y-4)^2 = 16$.

a) Tìm phương trình trục đối xứng của (C) và (C')

b) Tìm k sao cho (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tỷ số k

c) Tìm ảnh của (C) qua phép vị tự tâm I(3,4) tỷ số k = 2

d) Tìm tọa độ tâm vị tự của (C) và (C')

Bài 2. *Cho 2 đường tròn có bán kính khác nhau* (O_1) *và nằm ngoài nhau. Xét đường tròn (O) tiếp xúc ngoài đồng thời* (O_1) *tại A,*(O_2) *tại B. Trên đường tròn (O) ta lấy điểm M bất kì* $(M \neq A,\ B)$*. Đường thẳng MA cắt* (O_1) *tại* A_1*, MB cắt* (O_2) *tại điểm thứ hai* M_2*. Chứng minh rằng khi M di chuyển trên (O) thì đường thẳng* M_1M_2 *đi qua 1 điểm cố định.*

Bài 3. *(ELMO shortlist 2011)*
Cho 3 đường tròn ω, ω_1, ω *đôi một tiếp xúc nhau sao cho* ω_1, ω_2 *tiếp xúc ngoài tại* P*,* ω, ω_1 *tiếp xúc trong tại* A*,* ω, ω_2 *tiếp xúc trong tại* B*. Gọi* O*,* O_1*,* O_2 *lần lượt là tâm của* $\omega, \omega_1, \omega_2$ *Gọi* X *chân đường vuông góc từ* P *đến* AB*, chứng minh* $\angle O_1XP = \angle O_2XP$*.*

Bài 4. *(IMO shortlist 1998)*
Cho tam giác ABC*. Gọi* H *là trực tâm và* O *là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi* D*,* E*,* F *lần lượt là điểm đối xứng của* A *qua* BC*,* B *qua* CA *và của* C *qua* AB*. Chứng minh rằng* D*,* E*,* F *thẳng hàng khi và chỉ khi* $OH = 2R$*, với* R *là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.*

Bài 5. *Cho tam giác* ABC*. Gọi* D*,* E*,*F *là tiếp điểm của* BC*,* CA*,* AB *với* (I) *là đường tròn nội tiếp tam giác. Gọi* D'*,*E'*,*F' *đối xứng qua* I*.*
a) Chứng minh rằng AD'*,* BE' *và* CF' *đồng quy tại* J
b) Chứng minh rằng J *thuộc đường thẳng* IG *với* G *là trọng tâm tam giác* ABC*.*

Bài 6. *Cho hai đường tròn* (O_1) *và* (O_2) *cắt nhau tại* A *và* B*.* $C1C2$*,* $D1D2$ *là tiếp tuyến chung của* (O_1) *và* (O_2)*.* I_1*,* I_2 *là giao điểm của* C_1D_1 *và* C_2D_2 *với* O_1O_2*. Chứng minh rằng* $\angle O_1AO_2 = \angle I_1AI_2$

Bài 7. *Cho đường tròn (O) và điểm A, B thuộc đường tròn sao cho A, O, B không thẳng hàng. (I_1), (I_2) lần lượt tiếp xúc vớiAB tạiM, N tiếp xúc với cung nhỏ AB tại P, Q và tiếp xúc ngoài nhau tại K*
a) Chứng minh rằng K thuộc một đường tròn cố định.
b) Chứng minh rằng với mọi K luôn tìm được P sao cho H là tâm nội tiếp tam giác PAB.

Bài 8. *Cho tứ giác lồi $ABCD$. P là một điểm trên cạnh AB. Giả sử đường tròn ω nội tiếp tam giác CPD với tâm I tiếp xúc với đường tròn nội tiếp các tam giác APD và PBC lần lượt tại K và L. Đường thẳng AC và BD cắt nhau tại E và đường thẳngAK và BL cắt nhau tại F. Chứng minh rằng E,I, F thẳng hàng*

Bài 9. *Cho hình bình hành $ABCD$ và một đường thẳng $d \parallel BC$ cắt các cạnh AD,BC tại P và Q. Trên đường thẳng PQlấy các điểm E,F, Trên đường thẳng CD lấy các điểm M, N. Gỉa sử AM cắt BN tại S , AE cắt BF tại T, ME cắt NF tại R. chứng minh $\overline{S, T, R}$.*

Bài 10. *Cho tứ giác $ABCD$ có A_1, B_1, C_1, D_1 lần lược là trọng tâm các tam giác BCD, CDA, ADB, ABC. Tịnh tiến tứ giác theo $\overrightarrow{u}$ ta được một tứ giác tương ứng $A_2B_2C_2D_2$ ($T_{\overrightarrow{U}} : A \mapsto A_2, B_2, C \mapsto C_2, D \mapsto D_2$). Chứng minh rằng các đường thẳng $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2$ đồng quy.*

Bài 11. *(Chọn đội tuyển toán PTNK năm 2010)*
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi I, I_1, I_2, I_3 là tâm đường tròn nội tiếp và bàng tiếp các gócA, B, C tương ứng. Đường tròn ngoại tiếp tam giác I, I_2, I_3 cắt (O) tại hai điểm M_1, N_1 . Gọi J_1 (khác A) là giao điểm của AI và (O). Ký hiệu d_1 là đường thẳng qua J_1 và vuông góc với M_1N_1. Tương tự xác định các đường thẳng d_2, d_3. Chứng minh các đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy tại một điểm.

Bài 12. *(IMO shortlist 1998)*
Cho tam giác ABC . Gọi H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi D, E,F lần lượt là điểm đối xứng của A qua BC, B qua CA và của C qua AB. Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi $OH = 2R$, với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

*** to be continued ***

Chương 6

Tài liệu tham khảo

[1] Bài giảng của thầy Lê Bá Khánh Trình
[2] The Vietnamese Mathematical Olympiad 1990 – 2006, Library Mathematics and Youth.
[3] Phép biến hình trong mặt phẳng- Đỗ Thanh Sơn- NXB GD.
[4] Tài liệu chuyên toán hình học 10
[5] Những định lí chọn lọc trong hình học phẳng qua các kì thi Olympic-Nguyễn Văn Nho- NXB GD
[6] Chuyên đề hình học và một số vấn đề liên quan-Nguyễn Văn Mậu , Nguyễn Đăng Phất, Đỗ Thanh Sơn- NXB GD
[7] Internet.
[8] The gemetry of homologictal triangles.
[9] S.Grozdev,V.Nenkov, Set of homeotheties, connected with circumscribed quadrilaterals, Mathematics Plus, 4, Sofia (2009), 62-70(in bulgarian).
[10] J.Tabov, homothety by problems, Narodna prosveta, Sofia, 1989(in bulgarian).

TỔNG KẾT CHUYÊN ĐỀ

Nhìn chung, qua trang chuyên đề vừa rồi, chúng ta đã được đắm mình trong sự "vi diệu" của phép vị tự cũng như những ứng dụng của phép biến hình này trong giải các bài tập hay và khó.

Nhóm biên soạn đã có nhiều cố gắng, kể cả tìm hiểu, tham khảo chuyên đề của những bậc thầy cô trên khắp toàn quốc hay thậm chí sáng tạo ra một số bài tập cho bạn đọc tìm hiểu. Đã có sự nghiên cứu tìm tòi, phối hợp cùng phần mềm LATEX Overleaf , sự cần cù, phối hợp của các thành viên trong nhóm. Tất cả những điều này đã tạo nên ưu điểm cho chuyên đề phép vị tự.

Vì thời gian không nhiều, các thành viên chỉ mới học gõ Latex trong chưa đến một tuần nên nhóm biên soạn còn tương đối nhiều thiếu sót, chưa sáng tạo được nhiều bài hay cho bạn đọc giải và trao đổi. Dự kiến trong thời gian tới, nếu có điều kiện, nhóm sẽ tiếp tục Vol.2 của chuyên đề trên và sẽ bàn luận thêm về những cách ứng dụng độc đáo của phép vị tự trong các bài khó của đề thi IMO,VMO, Olympic 30/4, các kỳ thi học sinh giỏi trong và ngoài nước qua các năm, giải đáp những thắc mắc của bạn đọc về những bài tập tự luyện.

Một lần nữa xin cảm ơn các bạn đọc !